

ЗАМЕТКИ НА ПОЛЯХ

П. Б. Иванов

Изначально эти записи не предполагалось кому-то показывать. Но почему бы и нет? В конце концов, в разрозненных наблюдениях особая атмосфера, дух становления мысли — а местами и мудрости. Разумеется, мудрость (сколь угодно математическая) ни на сколько не делится — и каждому приходится культивировать ее в себе самостоятельно. Но если я смогу поделиться хотя бы приверженностью поискам разумности — это уже весомый вклад дикого философа в копилку представлений о подлинно человеческом будущем.

* * *

Математика сама по себе не имеет никакого отношения к красоте. Но люди способны усматривать красоту в чем угодно — в том числе, в математике.

* * *

Неформальные термины *сильный* и *слабый* — в современной математике на каждом шагу. Только придают им иной раз совершенно разные коннотации. Вот, пожалуй, самый частотный вариант, на примере конкретной отрасли математического производства [П. С. Александров, *Введение в теорию множеств и общую топологию* (1977)]:

Множество всех частичных порядков на данном множестве X само упорядочено естественным образом. Говорят, что порядок $<_1$ сильнее порядка $<_2$ (или порядок $<_2$ слабее порядка $<_1$), если для всяких $x, y \in X$ из $x <_2 y$ следует $x <_1 y$.

Здесь под словом *сильнее* подразумевается, скорее, то, что следовало бы назвать *широтой* (или *полнотой*): речь идет о декартовом квадрате некоторого множества, как множестве упорядоченных пар, из которого мы вправе надергать любые коллекции (отношения). Таких коллекции естественно упорядочить по вложению: все пары отношения 2 принадлежать также отношению 1, но некоторые пары отношения 1 не относятся к отношению 2. Никакая логика тут ни при чем: вовсе не предполагается выводить одно из другого — а наоборот: оба набора упорядоченных пар непосредственно и одновременно удерживаются в поле зрения. Понятно, что на практике, в каких-то уж очень громоздких ситуациях, нам проще заключить о некоторых событиях косвенным образом, на основании дополнительных сведений о предметной области. Однако исходное определение никаким боком не зависит от процедур установления факта упорядоченности. Якобы логическая связка (обозначенная словом *следует*) на самом деле — чисто предметная связь; сторонник строгого стиля скорее сказал бы: *означает*.

И рядом — пример противоположной оценки из той же науки: говорят, что топологические инварианты «сильнее» гомотопических — поскольку всякий гомеоморфизм предполагает и гомоморфизм, но вовсе не наоборот.

Переходя к логике (на уровень рефлексии), мы можем сохранить первое (*экстенсивное*) разграничение — ссылаясь на *объем* (область истинности) некоторой логической функции безотносительно к собственно логическим структурам. Для примера — пара высказываний, логически связанных с точки зрения досужего обывателя: *если я крокодил — я не человек*. Поскольку непринадлежность человеческому роду отнюдь не всегда означает превращение в крокодила, второе высказывание существенно шире первого — и в этом смысле «сильнее».

Ясно, что и здесь имеется в виду некоторая предметная область, заданный универсум. Но тот же обыватель может заметить, что первое высказывание куда определеннее, информативнее, полезнее для точной науки; с обыденной точки зрения такое уточнение «сильнее» — если, конечно, не принимать во внимание чисто эмоциональные оценки. В этом (*интенсивном*) понимании, слабое утверждение учитывает лишь небольшое число возможных характеристик предмета, тогда как в сильном — взяты сразу все.

Оба течения можно встретить и в оценке математических теорем. Так, расширения Брауэра и Шенфлиса для знаменитой теоремы Жордана (замкнутая плоская кривая без самопересечений делит плоскость на внутреннюю и внешнюю части) можно назвать ее усилением — хотя и в плохо совместимых направлениях. С другой стороны, конструктивное доказательство всегда мощнее (интенсивнее) абстрактных доказательств существования.

Казалось бы, очевидное решение: давайте вообще не будем использовать говорить о «силе» и «слабости» — хотя бы в наиболее строгих формальных рассуждениях. Взвешенное словоупотребление так никому не повредит. Лично я сомневаюсь, что лингвистические трюки способны сами по себе обеспечить приемлемость практических решений. Да, психологически, удачная номенклатура очень даже может навести кого-то на мысль. Но полностью формальных языков нет и быть не может! Поэтому какие-то разночтения возможны везде и всегда. Так не лучше ли, вместо погони за ветром, говорить как на душу легло — при необходимости уточняя смысл сказанного минимально достаточными (но только не чрезмерными) пояснениями.

* * *

Математика — способ подступиться к решению задачи, когда вы не умеете вообще ничего. Одно ничего приделать к другому — глядишь, что-то и получится... А когда научились работать руками — математика уже не требуется.

* * *

Доказательство в математике — пример некорректно поставленной задачи. Мы знаем ответ заранее — и дело за малым: подобрать подходящие материалы и построить. И то, и другое — неоднозначно; но для практики способ строительства не важен — нам бы получить результат. Если совсем не получается — не факт что это невозможно. Быть может, просто не сумели хорошо подготовиться: или материалы не те, или клеить надо по-другому...

* * *

S. MacLane, *Mathematics: Form and Function* (1986)

Since a formula is just a finite well-formed sequence of symbols, there is only a denumerable number of formulas in this language. Therefore, the presentation of Peano arithmetic provide only for a denumerable number of proofs by induction! This observation has the strange result that these Peano axioms have a “non-standard” model in ZFC. For consider a language with one additional constant δ and the following denumerable list of potential additional axioms:

$$0 < \delta, s(0) < \delta, ss(0) < \delta, sss(0) < \delta, \dots$$

Any finite subset of this list has a model. Therefore, by compactness, the whole list has a model — and in that model of the Peano axioms there is a “natural number” δ larger than any $s^n(0)$!

Прекрасная иллюстрация того, как всяческие метаматематики дважды заблуждаются: (1) они отождествляют теорию со способом ее презентации (язык) — и (2) они отождествляют язык со

способом его употребления (кодовая система). На самом деле, теория лишь *пользуется* (каким угодно) языком, чтобы выразить обнаруженные схемы деятельности — но ни один язык не в состоянии описать деятельность во всей ее полноте; можно сравнить это с тем, как музыкальная мысль выражается в какой-то из известных систем нотации — но грамотно прочесть партитуру может только опытный музыкант, и разные музыканты исполняют то же самое по-разному, в зависимости от культурных установок и личных обстоятельств. Аналогично, последовательность букв (или фонем) сама по себе никак не соотносится с языком; тем не менее, такие последовательности способны *представлять* язык в определенных (социальных) условиях. Возможно это лишь там, где культурно закреплена связь письма и речи со способами деятельности, с действиями и операциями; только на этой, деятельной основе возможен перевод с одного языка на другой. То есть, всякий конечный набор кодов допускает бесконечность интерпретаций, и не существует способа конечным образом (формально) задать используемую в данном практическом контексте интерпретацию. Мы понимаем друг друга в силу общности нашей культуры и истории — так что личность каждого по сути оказывается бесконечной. Взятый сам по себе, ни один физический процесс не несет никакой информации; чтобы превратить его в сигнал, нужна система более высокого уровня, способная разделить его на осмысленные элементы («слова») и догадаться, что стоит за каждым словом.

Вспомним также о том, что любой язык допускает какие угодно расширения — и люди всегда могут придумать новые имена (или обозначения) для того, что никак не выразимо по-старому. В результате ни одна теория не исчерпывается конечными последовательностями символов заранее заданного алфавита. В процессе развертывания теории нам приходится регулярно обогащать ее новыми выразительными формами, ссылающимися на ожидаемые формальные результаты, — а способы употребления таких неологизмов пояснять как-нибудь неформально. Как правило, плоды абстрактного комбинирования не сразу становятся общеупотребительными: сначала это особенности профессионального жаргона — позже, по мере накопления культурных связей, они закрепляются в практике повседневного общения.

Благодаря этому оказывается, что мы все-таки способны теоретизировать о бесконечном. Да, никакая конечная формула не дает полного определения — но как только в культуре сформировалась общая идея, достаточно ее как-то назвать и формально увязать с прежними представлениями.

Можно сравнить это с техникой операционального замыкания, широко используемой для пополнения ранее введенных математических структур (множеств, пространств, и т. д.): если выясняется, что последовательность технологически допустимых операций не сходится ни к одному из имеющихся элементов, мы просто объявляем эту последовательность (точнее, класс в некотором смысле эквивалентных последовательностей) добавочным элементом того же универсума. Эта логика в точности воспроизводит наше повседневное поведение — и потому вполне уместна в науке (если, конечно, не забывать об принципиальной ограниченности и частичности всяческой абстракции).

* * *

Математика и логика — противоположности.

Которые иногда сходятся — но не так, чтобы уж очень часто...

* * *

Поскольку вещественное число — это скорее процесс чем готовая вещь, как следует понимать равенство вещественных чисел? Бесконечно малые различия образуют какие-то

классы эквивалентности, и два числа равны, если они принадлежат одному классу. Однако говорить об эквивалентности мы можем только опираясь на некоторое предварительное понятие равенства — в другом смысле, на другом уровне иерархии. Проекция этой иерархии на вещественную ось приводит к логическому кругу в определениях.

* * *

У Евклида: 5 постулатов (αἴτημα) и 9 аксиом (ἀξιώματα). Чем одно отличается от другого?

Этимологически, постулат — всего лишь просьба, запрос, предложение, — то есть, субъективное пожелание, не более. Напротив, аксиома — то что представляет ценность само по себе, вызывает уважение и предполагается по умолчанию; это тоже субъективно (как и все в рефлексии) — однако не столь подвижно, не произвольно, связано с внешней необходимостью. Мнение так же противостоит истине: индивидуальная предрасположенность — и строение коллективного субъекта.

Математика отказывается усматривать различие. Для нее источник знания не имеет значения. Однажды доказанная теорема играет роль исходного пункта для последующих выводов. И начинать можно с разных идей: обращение иерархии не меняет теории в целом.

Подход вполне допустимый — пока есть возможность абстрагироваться от динамики. Предполагается, что математическая теория дана сразу и целиком, все ее конструкты уже существуют, все возможные связи уже установлены — и нам остается только разглядывать картину, в которой от нас не зависит вообще ничего. Это не только методологический принцип, но и вопрос идеологии, апологетика существующего общественно-экономического строя. Не удивительно, что математика стала царицей наук: она верой и правдой служит земным царям.

Более гибкая позиция — оставить лишь часть основ неприкосновенными, а остальное допускается варьировать, переходя к разным теориям — каждая из которых может оказаться предпочтительнее других при соответствующем стечении обстоятельств. Вот здесь различие аксиом и постулатов вполне уместно, и тогда доказуемые утверждения (теоремы) естественно располагаются на следующем уровне иерархии.

В качестве синтеза — возврат к равноправию любых гипотез, но теперь уже в смысле допустимости разных «пучков теорий», возникающих при варьировании части исходных посылок (переведенных в разряд постулатов). Мы усматриваем сложное в простом, нарушаем симметрию, чтобы восстановить ее на новом уровне.

* * *

Н. М. Hubey, *The Diagonal Infinity* (1998)

So mathematics is also an empirical-experimental science, and these days, the development of computation engines is the perfect way for mathematicians to gain what a physicist would call intuition. [...] The formal system is a hypothesis; the theorems are predictions. Whether they are true depends on the real world.

Компьютерные средства аналитических вычислений (MatLab, Maple, Scientific Workplace и др.), при всей их полезности для развития математической интуиции, никак не могут служить средством увязывания математики с человеческим миром. Поэтому «чистые» математики, почти незнакомые с житейскими проблемами, оказываются недостаточно компетентными, чтобы обсуждать основания математики. Настоящее тело математической теории, ее материя и суть ее форм, — это совокупность ее приложений в математике, в других науках, в искусстве, в философии, или в быту; только практика может стать критерием истины.

Например, проблемы взаимосвязи дискретности и непрерывности (целые числа — или вещественные) на практике давно закрыты, поскольку наработанные за тысячи лет формальные (в частности, математические) результаты успешно применяются в ходе целенаправленного преобразования природы. Если есть производственная необходимость — мы запросто комбинируем любые возможности, переходим к многоуровневым схемам. Так, в квантовой физике наблюдаются как дискретные, так и непрерывные спектры — а чтобы изучать профили спектральных резонансов, приходится рассматривать серии квазисвязанных состояний, вложенные в один или несколько континуумов.

* * *

Глупый вопрос: какова геометрия реального мира?

Она разная — в зависимости от того, что мы с этим миром собираемся делать. В каких-то случаях это вообще нельзя назвать геометрией.

* * *

Превышение точности в физике — грубая ошибка. В математике — это нормально, и встречается на каждом шагу... Однажды придуманную форму представления идей бездумно переносят на все подряд и возводят в эталон строгости; а в итоге — якобы строгие рассуждения о весьма смутно понимаемом предмете (если не полная беспредметность).

* * *

В философии качество как таковое не подлежит измерению — даже в терминах бинарной дискриминации. Потому что есть (оно) или нет (его) — это уже количество! То есть, суждение о мере присутствия уже определенного качества. Однако качество не может существовать само по себе (как дух не может без материи). Оно обязательно *представлено* какой-то вещью, обладающей этим качеством (в каком угодно смысле). Тогда эта вещь становится единицей, образцом, мерой качества, — и все остальные вещи мы сравниваем с ней (или они объективно сопоставимы в природе). Это внешнее сопоставление и есть количество.

Следующий этап — упорядочение вещей по степени присутствия качества или по способам его проявления. Каждая такая иерархическая структура задает некоторую шкалу. Но в пределах шкалы безразлично с какого уровня начинать отсчет — и что именно принять за единицу. Так возникают обращения шкал, а все вместе они образуют иерархию мер.

* * *

Математика лишь накладывает ограничения на обычные способы действия.

Насколько возможно действительно этим ограничиться, говорит практика.

Вместо теории вероятностей следовало бы, вероятно, развить «теорию невозможности». Человеческая деятельность потенциально безгранична — но в каждый момент приходится ее сводить к чему-то конечному (действие, операция), и выбирать надо не вообще, а с учетом текущих возможностей. Формально, на абстрактную вселенную (которая для нас не существует вся целиком, как объект) наложены связи. И видим мы только то, что удовлетворяет этим связям. Можно говорить о внутренней мере связи (глубина связывания) и ее внешней широте (количество затронутых элементов). Отношение (аналог рационального числа) — определяет

размерность связи. Разумеется, в общем случае тут не числа, а распределения или свертки. Интересен переход от одной системы связей к другой. Этим люди и занимаются по жизни.

* * *

Материализм в математике: не бывает радиуса кривизны без кривизны. Но если мы ограничимся только этим — получится вульгарный материализм. В деятельности рефлексия становится материей, и наоборот. Например, можно развить особую науку о радиусах вообще; тогда придется выяснять какие у таких объектов есть свойства — и эти свойства будут отнесены к их объекту, абстрактному радиусу. А вовсе не к радиусу кривизны. Потому что радиус как объект и радиус как свойство — две большие разницы! Всеобщая и особенная формы одного и того же — обычное дело; однако превратить одно в другое может только деятельность, в ходе которой изменяются и всеобщее, и особенное.

* * *

Современная математика преувеличенно внимательна к доказательствам — за которыми так легко потерять суть дела. По жизни, нам не очень интересно, каким способом получен результат, — нам важно, что получилось в итоге, и насколько это приложимо к практическим задачам. Насколько мы доверяем автору — совершенно другой вопрос, к науке отношения не имеющий. Академическая традиция восходит к античной и средневековой схоластике, когда результатом считали возможность навязать мнение, безотносительно к действительному положению вещей. В этом классовые корни математики. Если же нам интересно поделиться с другими своими взглядами (не отвергая с порога никаких альтернатив), формальные рассуждения теряют статус доказательств и превращаются в эвристики, поиск единства.

* * *

В. А. Успенский, *Что такое аксиоматический метод* (2001):

Если же мы будем доказывать нашу теорему с помощью других, ранее доказанных теорем, а те, другие, теоремы — с помощью третьих и т. д., то ведь всё равно этот процесс не может продолжаться бесконечно. Значит, где-то придётся остановиться, т. е. уже не доказывать какие-то предложения, а принять их за аксиомы.

И несколькими страницами ниже:

Итак, при дефиниционном способе одни понятия определяются через другие, другие — через третьи и т. д. Но ведь мы не можем продолжать этот процесс бесконечно. А значит, на каких-то геометрических понятиях мы вынуждены остановиться и далее их не определять. Эти понятия, которые уже не имеют определения, называют *неопределяемыми*, или *исходными*.

Странная логика. Если мы из одного делаем другое, а исходный материал надо тоже как-то производить, это вовсе не означает, что на каком-то этапе придется остановиться и задействовать только готовые вещи, взятые невзвесть откуда. Почему нельзя считать первичным именно процесс порождения? Пусть он продолжается сколько угодно и в будущее, и в прошлое. Чему это мешает? При таком подходе не нужны ни аксиомы, ни исходные определения, — достаточно показать внутреннюю связность нашего знания, когда из одного следует другое, — но оно точно также может следовать из чего-то еще. Если мы знаем, что на сфере две любые точки можно соединить непрерывной кривой, это вовсе не повод искать первичную точку, из которой получены все остальные.

Попытка все свести к единственному набору правил (божественного происхождения) — типичная черта классового общества. Аксиоматический метод состоит в том, чтобы отделить законодателей от исполнителей, правила от следования правилам. Академические инстанции в этой картине играют роль судебной власти, отстраняя от науки тех, кто не по душе властям.

Намного интереснее жить в развивающемся мире, где всякая правильность условна, и любое доказательство — лишь игра. Мы сами устанавливаем для себя правила — и мы вправе в любой момент их изменить. В любой игре есть доля истины — но истина не в науке, а в жизни, которой вовсе не обязательно иметь начало и конец.

* * *

Идея пространства — отражение объективности мира в целом: наша практика вмещает только часть возможных связей — но мы знаем, что есть и другие; именно это знание о том, чего мы не знаем, отличает разумного человека от животных. Для нас пространство — набор возможностей; в каждой конкретной деятельности используются лишь некоторые — так различают разные типы пространств (разные стороны одного и того же). Тип пространства — это иерархия «вложенных» в него (или, скорее, возможных в нем) объектов, которые мы можем также создавать — и тогда они становятся продуктами деятельности. Все это существует лишь «локально», в пределах досягаемости; экстраполяция на пространство в целом заведомо некорректна: даже если объявить пространством совокупность всех допустимых объектов — такая совокупность глобальна по отношению к самим этим объектам и потому не входит в их число и может обладать свойствами, невыразимыми на этом языке (что, конечно, не делает такие свойства невыразимыми вообще — поскольку всегда возможны другие «теории»).

Например, традиционная геометрия предполагает существование точек пространства, линий, поверхностей и тел... Вообще говоря, это разные типы объектов, и лишь в каком-то приближении возможно строить линии из точек, поверхности из линий и т. д. Тем более не всегда определены расстояния, площади и объемы. Но даже наличие метрики не требует, вообще говоря, локальных координатных систем — и тем более глобальной арифметизации пространства.

Однако в каких-то случаях наши обычные представления о точках (и прочих локализованных объектах) оказываются неприменимыми — и надо строить теорию, исходя из свойств таких, нелокализованных объектов — которые, тем не менее, остаются локальными в смысле частичности описания, привязки к одной из сторон действительности, так что их поведение нельзя безоговорочно экстраполировать на пространство в целом. Говорить о точках и линиях в этом случае мы не можем — и нужны другие понятия (поля, токи и т. д.). Привычка моделировать нелокализованные объекты локализованными (например, распределениями и потоками) — лишь одна из возможностей, подобно сведению геометрии к арифметике.