ФИЛОСОФИЯ МАТЕМАТИКИ

http://unism.pjwb.org
http://unism.pjwb.net
http://unism.narod.ru

Черновые наброски 1984–2000. В основном для того, чтобы кое-то уяснить для себя. Предполагалось использовать что-то из этого в качестве иллюстративного материала в расширенной версии уже опубликованных набросков «Философии сознания» (Trafford 2009). Здесь представлены относительно готовые фрагменты, для иллюстрации общего хода мысли и в качестве намека на ситуацию в науке из которой выросли другие ветви унизма. Тексты никак не связаны друг с другом, и расположены в случайном порядке — чтобы не производить впечатления монографии.

Математический огонь

История математики — одна из самых подробных историй. Уже в глубокой древности на формальные находки стали навешивать имена. Открытия Пифагора (и пифагорейская бравада Платона) — больше из области мифологии, но уж после Аристотеля — все в трактатах и документах… Вероятно, эта гора информации в чем-то полезна и для самой математики. Но еще полезней она для философии науки в целом, и для философии математики в частности. Если нужно подкрепить общие рассуждения историческими аллюзиями — математика тут как тут. Энциклопедия методологии.

Но философия — не только теория познания. Преувеличенное внимание к технологиям добывания знаний нужно кому-то, чтобы отвлечь публику от других, куда более насущных проблем. Соответственно, наукообразие в философии (и его формальная противоположность, словоблудие) — не более чем ширма, эффектный фокус, тогда как подлинная мудрость не гнушается и яркой образности, и (не слишком назойливого) менторства… Но прежде всего — философия в делах людей, в том, как они видят мир, — и что хотят с ним сотворить.

Чтобы разбавить традиционную заумь книжек по философии математики, начнем с пылающей метафоры: уподобим историю математики истории овладения огнем. Тем более, что обе эти истории примерно одной длины.

Первые математические знания сохранялись в форме навыков счета и работы с формами. Умение считать передавалось от учителя ученику, из поколения в поколение; редкие независимые находки тут же включались в какую-нибудь практическую цепочку; цепочки разветвлялись и множились — так что общий уровень математической просвещенности рос из тысячелетия в тысячелетие, потом из столетия в столетие, потом из поколения в поколение. Абсолютно то же самое мы видим в ранней истории приручения огня: мы еще не умеем зажигать огонь — но уже умеем его беречь и передавать другим. Технологии того и другого интенсивно совершенствовались, позволяя не гасить пламя на протяжении многих тысяч лет.

Потом научились люди добывать огонь трением — и освободились от необходимости выстраивать жизнь вокруг очага, ибо новый очаг теперь возможен где угодно по первому зову. Огонь становится надежнее и безопасней. На смену технологиям сохранения и передачи — приходят технологии добывания огня. Изобретение эффективных приспособлений, внедрение поверхностей с контролируемым трением и легко воспламеняющихся подложек… Производство в целом начинает интенсивно развиваться — и поставляет все новые принципы огненному делу. Наконец, возникает шедевр цивилизации, кульминация метода — обыкновенная спичка.

Точно так же и в математике первые неуклюжие попытки обоснования выводов приводят к отлаженной схеме, которую местами можно препоручить даже роботам. Многочисленные эквивалентные формулировки математических теорий — одна другой удобней — позволяют быстро развить новую теорию из нескольких простых идей.

Но трение — не единственный источник огня. Параллельно развивается альтернативная технология добывания искр при соударении твердых тел. И здесь тоже масса открытий, и стремительный индустриальный прогресс, воплощенный сегодня в зажигалке. Понятно, что обе ветви сильно переплетаются, одна подгоняет другую. Принцип один: ввести горячее тело в легко воспламеняющийся субстрат — и контролируемым образом перевести горение в стационарный режим. Что лучше? Что первично? Вопрос пустой, ибо все решают практические соображения. Что удобнее — тем и пользуемся. Точно так же, как жаркие споры об основаниях математики не очень-то важны для работающего математика, который всегда может сделать другим способом то, что сразу не сложилось. Его больше интересует результат — стабильное горение.

Так человечество приходит к новому этапу огненной истории. Оказывается, что огонь — это один из видов плазмы, и можно окончательно приручить огненную стихию, заключив открытое пламя в управляемые газовые потоки, и даже в полностью закрытые газоразрядные трубки. На пути к этому — еще одна технология поджига, электрический пробой в воздухе (или специально подобранной газовой смеси). Не случайность крохотных искорок — а большая и жирная электрическая дуга. Электрозажигалки можно использовать и для получения открытого огня — но все же их основная технологическая линия уже в другом направлении. Нечто подобное намечается и в современной математике, когда фокус развития смещается от доказательства и вычисления к моделированию. Математический огонь теперь пылает в компьютерном железе, в алгоритмах и сетевых решениях.

Но и это еще не все. На дальних задворках истории издавна теплилась экзотическая возможность получать огонь путем концентрации солнечных лучей. Особого веса в обычных промыслах этот способ не получил, а ко времени появления хороших линз другие технологии настолько укоренились, что солнечное пламя осталось игрой, забавой для детей и ритуалом для взрослых. С другой стороны, солнце то здесь, то за тучами, — в карман его не положишь, как спички или зажигалку. А кое-где его по несколько месяцев дожидаются. Может ли что-нибудь из этого вырасти? Может. Вырастает большая мечта. В конечном итоге, Солнце — источник всякого огня на Земле. Так почему бы нам не научиться зажигать солнца? Но Солнце — всего лишь крохотная звездочка на окраине одной из бесчисленных галактик. А мы люди, и мы можем посягнуть на больше, мы будем зажигать вселенные…

Возможно, одна из математических безделушек, пока не привлекающая академического внимания, поддерживает в нас огонек математической мечты, уводящей в неведомые дали, за пределы существующей математической вселенной. Что это будет — мы узнаем потом. Пока же не следует пренебрежительно отзываться о философии. Да, это ужасно нестрого — но хотя бы здесь мы не связаны рамками формальных приличий и можем играть и мечтать.

Гуманитарная математика

Большая часть обывателей (как математически подкованных, так и далеких от формальной зауми) согласится, что математика — это наука. Хотя кое-кто предпочел бы уверовать, что это не просто наука, а нечто совсем особенное — то, что лежит в основании научности как таковой и является необходимой предпосылкой всякого познания. Наконец, есть и такие, кто выставляет математические способности как врожденный дар — высшее знание, мистическим образом встроенное в человекоживотных в качестве изначальной печати сознания.

Конечно же, такие представления возникают не на пустом месте. На первый взгляд, математики ведут себя подобно другим ученым — по крайней мере, если судить по манере выражения. С другой стороны, не так-то просто сообразить, что же конкретно изучают они в своих формальных теориях, приспособить которые к делу удается лишь спустя много лет (а то и столетий). Для внешнего наблюдателя, математика — нечто вроде копошащегося сгустка живой протоплазмы, из которого иногда вытягиваются отростки то в одном направлении, то в другом, вплоть до отрыва от первичной материи и оформления в какую-нибудь обычную науку. Если по-простому — наука должна изучать нечто объективное, что сидит вне науки и служит источником ее фактов и ее областью применения. Этот принцип относительной объективности учитывает всю иерархию непрямых связей человека с природой, когда науки более высокого уровня надстраиваются над каким-то классом других наук, которые, в свою очередь, могут опираться на предшествующие обобщения, а их предметной областью становятся сколь угодно формальные абстракции. Как и во всякой иерархии, различие «верха» и «низа» относительно, и может запросто оказаться, что какие-то две науки служат эмпирической основой друг друга.

В математике нас постоянно преследует чувство произвольности, внутренней пустоты и бессодержательности, — поскольку всегда возможно выстроить формально правильную теорию на базе случайного набора аксиом, одинаково приемлемых, — и нет ни малейшего повода предпочесть одну другой.

В древности было не так. Математическое знание вытекало из непосредственного опыта практической деятельности, обслуживало повседневные потребности людей. Со временем расслоение и разделение труда отделяет навыки и умения от их живого применения — но вплоть до конца XIX века оставалась надежда на существование «естественного» основания, из которого выводятся все остальные математических абстракции. Альтернативные геометрии, алгебраическая революция и компьютерная наука развеяли эти иллюзии — и оставили нас лицом к лицу со странной возможностью изобретать фантастические миры, в которых никогда не поселится ни одной живой души.

Но изменило ли это на самом деле характер математического знания? Вопреки любым формалистическим играм, у нас остаются общие идеи числа и внешнего облика, а любые альтернативные понятия математической строгости очевидным образом продолжают всю ту же линию поиска причин и следствий, вдохновлявшего технологический прогресс от первобытной магии до современных роботизированных производств. Если мы сделаем так и так — мы получим именно то, что ожидаем получить, — если только внешние обстоятельства (включая наши глупые ошибки) не изменят слишком резко производственную среду.

Так мы опять приходим к теме научного статуса математики. Предметную область этой странной науки можно попытаться обрисовать, используя подсказки далекого прошлого, когда происхождение математики из опыта было еще вполне очевидно.

Человеческая деятельность всегда направлена на изменение окружающего мира. Каждый особый способ такого изменения подталкивает к развитию соответствующей науки, предметной областью которой становится объективная организация порождающей деятельности. Иерархия наук отражает иерархию типовых деятельностей. Но есть и фундаментальные свойства, связанные с устройством всякой деятельности вообще, в которой разумный субъект выделяет часть мира в качестве объекта — и сознательно преобразует это в требуемый продукт. В итоге, каждый продукт можно рассматривать двояким образом: с одной стороны, это еще один объект (материальный продукт), а с другой — это воплощение способа производства (идеальный продукт). Это объективное внутреннее «расщепление» приводит (в определенных общественных условиях) к разделению науки на две взаимно дополнительные области: материальные аспекты деятельности относят к ведению естественнонаучных дисциплин — тогда как знание о способах действия накапливают гуманитарные науки. Последние называют также «общественными» — подчеркивая то обстоятельство, что никакая сознательная деятельность в одиночку, наедине с собой, попросту невозможна, и сама идея сознания предполагает совместность, общение. Таким образом, субъект всякой деятельности (и субъект вообще) иерархичен: индивидуализированные формы субъектности взаимодействуют в ней со всевозможными уровнями коллективного субъекта, от пары любовников до человечества в целом.

Вопрос: говорит математика что-либо о материальном производстве? Вряд ли. Лишь некоторые чудаки всерьез считают математические объекты самостоятельными вещами, способными существовать сами по себе (соответствующая философская позиция называется объективным идеализмом и обычно связывается с именем Платона). Интуиция говорит, что математическое знание скорее указывает на общие свойства вещей — однако для нас в вещах существенно лишь то, как мы включаем их в сознательную деятельность. Следовательно, математика призвана заниматься какими-то сторонами человеческой деятельности — и потому с полным правом может быть отнесены к классу гуманитарных наук. Иначе говоря, математика позволяет нам что-то узнать о самих себе — и математики тут ничем не отличаются от гуманитариев. Это прекрасно согласуется с кажущейся произвольностью математических теорий: общественные науки смотрят на мир с позиций субъекта, что предполагает, в частности, свободу выбора. В обыденной жизни нам постоянно приходится принимать решения, выбирать тот или иной способ действия. Богатство возможностей напрямую связано с богатством и гибкостью математики. С точки зрения философского материализма, полного произвола быть не может, поскольку набор имеющихся вариантов зависит от объективной организации нашей деятельности, он в природе вещей. Отсюда бросающаяся в глаза жесткость математического метода — по сравнению с произвольностью предпосылок.

Можно предположить, что значительные сдвиги в строении культуры породят новый стиль математического мышления. Впрочем, пока (то есть, на памяти цивилизации) человечество не испытывало революций такого масштаба — и нам вполне комфортно в рамках существующих парадигм. Однако можно попытаться усмотреть в исторически известных методологических переворотах знаки того, что еще может произойти. В любом случае, не бывает абсолютно завершенных наук. Хотя некоторые науки (включая математические теории) уже, вроде бы, не требуют творческого развития, потеря интереса к ним — сугубо локальное явление, и всегда есть шанс наткнуться на нечто такое, что раньше не привлекало внимания, что мы просмотрели за прочими делами — и чем опрометчиво пренебрегли.

В периоды относительной стабильности естественные науки вырабатывают особую внутреннюю структуру, которая в конце концов уводит их от природы и внешне уподобляет гуманитарному знанию. Типичная статья по математике (или физике) напичкана метафорами и аллюзиями, слишком вольным использованием обычного языка (без которого не обойтись даже в самых формальных рассуждениях); на каждом шагу упоминаются какие-то имена (которые, вроде бы, призваны указать на связь с ранее введенными понятиями — но обычно так и остаются пустым звуком). В таких «технических» работах невозможно соблюсти концептуальную и теоретическую последовательность, поскольку изложение материала опирается на необъятное множество явных и неявных предположений и требует предварительного знакомства с неподъемными пластами специальных сведений. Профессионализм тем самым почти полностью сводится к владению узко-цеховым жаргоном, логическая прозрачность принесена в жертву эрудиции. В итоге, профессионалы больше стараются произвести впечатление на публику, чем просветить ее.

Для новичка современная наука — нечто совершенно неудобоваримое, поскольку одной жизни никак не хватит, чтобы ознакомиться со всеми источниками, не говоря уже о критической их оценке. Хаотичность библиографии и неизбежные перекрестные ссылки делают проверку логической целостности и фактуальной обоснованности специального текста практически неосуществимой. Правильность рассуждения — уже не подлежит обоснованию; это предмет общепринятых соглашений, предрассудков или академической моды. Оказывается, что наука развивается не от истины к истине, а от одного уровня веры к другому. Для изучения науки доверчивость и хорошая память куда важнее любознательности и понятливости.

В результате общее строение математического знания остается чистой условностью, наподобие того, что мы наблюдаем в прикладных дисциплинах вроде юриспруденции или бухгалтерского учета. Отсутствие естественной организации не позволяет расставить точки опоры так, чтобы для каждой проблемы легко было подобрать подходящий формализм. Это словарь без алфавита, упорядоченный по случайным признакам, вроде ключей и количества черт в китайских и японских словарях иероглифов (или хеширования в компьютерах). В конце концов количество используемых символов превышает любые разумные пределы — и целое разваливается на слабо связанны меж собой традиционные отрасли.

Впрочем, нет худа без добра. Пока математика остается хаотической массой, она просто не в состоянии подмять под себя другие науки. Всегда остается место для метафорических манипуляций и формальные выкладки теряют магический ореол, не дают полностью положиться на технический результат и заставляют исследователей приглядываться к природе, не увязнуть в бессмысленном комбинировании собственных фантазий. Поскольку не всегда удается найти приемлемые математические модели, мы вынуждены организовывать знание в соответствии со строением предметной области, вместо того, чтобы подгонять наблюдения под теоретический произвол. Так, глядишь, и отыщется нечто вполне оригинальное, для чего придется придумывать совершенно другую математику.

Профессиональные ученые (например, физики) обычно работают с ограниченным набором математических инструментов, эдаким личным хранилищем типовых приемов и компонент для строительства новых теоретических моделей. Когда жизнь требует радикального изменения представлений, типовых решений не хватает, и математизация начинается с нуля; даже если математики уже изобрели все необходимое, найти что-то конкретное в математических завалах совершенно немыслимо (если только не наткнуться случайно). В случае успеха — математики заимствуют общие черты научного рукоделия, приспосабливают к ним ранее изученные конструкты, — и вот уже готова новая теория *ad hoc*, которую можно смело присовокупить к уже имеющимся: куча формалистического мусора растет и пухнет. Элементы математического метода, которые в конце концов проникают в специальные науки, — это не что иное как их собственные достижения, переформулированные и «облагороженные», пропитанные духом «строгости». Это, опять же, напоминает о традициях гуманитарных наук: прежде чем получить официальный статус, новое учение должно заручиться поддержкой авторитетов, застолбить свою нишу и приобрести формальное право состязаться с другими; впоследствии такое «сертифицированное» знание может при случае оказывать протекцию всяческим молокососам. Претензии математики на исключительное место в науке в точности воспроизводят попытки США утвердить себя в роли единственной сверхдержавы на мировой политико-экономической арене. Внутренние разногласия американского общества позволяют другим нациям в какой-то мере сохранять независимость и лавировать в навязанных извне рамках в поисках собственного пути — а любые находки тут же узурпируются диктатором и становятся частью системы. Настанет время, когда наука забудет о междисциплинарных границах и лестнице авторитетов, когда не будет научных званий и степеней. В по-новому развернутой иерархии уже незачем будет отличать естественные науки от «неестественных» или «сверхъестественных». Это логическое следствие смены мирового порядка, уничтожающей рыночную экономику, классовое неравенство, любые виды конкуренции, — на всех уровнях человеческой культуры и в новых формах самодвижения мира.

Фундаментальная относительность

На протяжении многих веков мощь математики связывали с ее дедуктивной структурой, позволяющей предположить наличие разнообразнейших свойств математического объекта на основании небольшого числа фундаментальных утверждений. Укоренившаяся привычка будит у некоторых надежду, что когда-нибудь математика в целом станет стройной дедуктивной системой, основанной на нескольких абсолютно бесспорных истинах. Поиск универсальных оснований математики не прекращается по сей день, один кандидат появляется за другим — каждый со своими прелестями и недостатками, — но почуять близость удачи пока так и не удалось. К тому же, разные математические школы не всегда уживаются друг с другом, свести одну к другой никак не получается: несмотря на согласие по большинству практически важных вопросов, каждая такая наука предлагает и нечто особенное, что в других математиках просто немыслимо. То есть, вместо всеобъемлющей формальной конструкции, мы имеем лишь набор возможностей, и каждый вариант по-своему последователен и строг. Когда-то считавшаяся истиной в последней инстанции, математика все больше растворяется в многочисленных альтернативах, и ни одна математическая истина уже не абсолютна, так что математика перестает быть всеобщим арбитром, теряет право решающего слова — и превращается в обычную науку, среди других наук. Да, это плохая новость для тех, кто ищет в математике убежище, уголок душевного комфорта среди неустроенного мира. И все же избавление от ослепительной исключительности, вне всяких сомнений, благотворно скажется на развитии математического знания.

В частности, мы можем заметить, что парадигмы других наук быстро пропитывают мысль математика, открывают ей новые направления. По большому счету, это главный источник математического развития, поскольку любые внутренние интересы не идут дальше отдельных уточнений и отложенных доказательств, тогда как появление действительно ценного конструкта связано с насущными культурными потребностями (как материального свойства, так и в сфере рефлексии). Задача работающего математика — внимательно присматриваться к окружающему миру, искать в разнообразии человеческих деятельностей нечто такое, что их формально похожими, — а значит, допускает представление математическими формами. По большей части оказывается возможным скомпоновать такие формализации из готовых компонент, пылящихся до поры до времени в запасниках математической науки; но иногда удается набрести и на свежую идею — а мотив великого открытия отнюдь не маловажен, на фоне личного любопытства.

Когда заходит речь об основаниях науки, мы переходим в область научного самосознания, и здесь крайне важно определить свое место в кругу других наук. Смотреть на себя можно только чужими глазами. От соблазнительных метафор мы постепенно переходим к общности целей и методов, а потом и к единой концептуальной платформе.

На самом верхнем уровне придется объяснять, зачем вообще требуется склеивать разные парадигмы — и понять, когда они сами тянутся одна к другой. Именно здесь естественно вступает в игру идея относительности. Возможные платформы синтеза становятся прямыми аналогами физических систем отсчета, а стандартные доказательства эквивалентности играют роль преобразований координат. Как и в физике, существуют динамически разные семейства систем отсчета, которые нельзя свести друг к другу без дополнительных предположений (инерциальных сил) — однако внутри каждого семейства все существенные черты науки остаются неизменными в любой из возможных формулировок. Но, как и в физике, мы стоим перед проблемой объективности знания, ибо не всегда легко отличить действительные проблемы от фиктивных вопросов, возникающих в недостаточно корректной модели; здесь нужно искать более широкий контекст, в котором естественно возникает иерархий таких различений, со всеми ее обращениями и возможностями роста. Каждая отдельная иерархическая структура может стать математической теорией — но нет никакой всеобщей математики, справедливой в любых концептуальных рамках.

Впечатляющая эффективность науки во многом связана со способностью абстракции, а значит, недостаточной универсальностью. Однако не бывает абстракций без того, от чего мы абстрагируемся, и потому любая наука (включая математику) должна рассматривать целостный предмет то с одной стороны, то с другой, не стремясь к исчерпывающему описанию: даже если собрать вместе все эти частные науки, полученная картина все равно останется абстрактной и приблизительной, поскольку подлинная конкретность достижима лишь вне науки как таковой, в практике. Вот и разгадка концептуальной относительности. Нам вовсе не нужно разбираться в деталях устройства каждой отдельной науки; все, что нам нужно, — это схемы деятельности (предписания, рецепты), применимые к ограниченному набору типовых ситуаций. Ясно, что такие схемы никак не могут иметь абсолютной значимости, они существенно зависят от организации деятельности. Пока люди делают нечто похоже — они пользуются общим для всех набором формальных инструментов, которые в каждом конкретном случае надо по-своему приспосабливать к делу, и каждый держит под рукой то, что ему по жизни требуется чаще. Системы отсчета (концептуальные платформы) лишь представляют объективное строение деятельности в коллективном сознании.

Универсальность разума как его определяющий атрибут означает, в частности, что любая сторона деятельности может превратиться в обособленную деятельность — и обратно, сколь угодно разные деятельности могут стать сторонами единой деятельности. Так научная рефлексия воплощается в институализированной науке, а одна наука становится парадигмой для другой. Математика может развиваться сколь угодно рефлексивно — это не дает нам повода искать ее исток в самой математике, всего лишь излагая основы науки на языке той же науки. Математика иерархична, она не сводится к тривиальной плоской структуре. Каждая математическая теория есть абстрактная модель соответствующего объекта — а теория такой теории принадлежит уже следующему уровню иерархии, у нее свой, особый предмет. В пределах фиксированной иерархической структуры мы можем обнаружить, что многие теории подобны друг другу. Однако изоморфизм не означает тождества — скорее, это *относительная тождественность* в составе целостности более высокого уровня, как ее особый аспект. И это опять навевает мысль о связанных инерционными преобразованиями (изоморфизмами) системах отсчета в физике, которые в силу этой связи считаются «физически эквивалентными». Неизбежен логический круг: с одной стороны, мы указываем на физическую эквивалентность как основу инерциальности, а с другой, понятие инерциального движения определено лишь в отношении некоторого класса физически эквивалентных систем. Разорвать этот круг возможно лишь с точки зрения более высокого уровня (в практическом контексте). Аналогично, в поисках оснований математики мы лишь устанавливаем некий культурный контекст, в пределах которого допустимо формальное преобразование одной теории в другую при сохранении парадигм более высшего уровня. Но эта объединяющая парадигма не с потолка, она связана с практически определенным способом деятельности; изменение парадигм предполагает значительные культурные сдвиги — прежде всего связанные с развитием способа материального производства.

Математика и компьютеры

На каждом шагу нас пытаются убедить, что компьютерная революция рубежа XX и XXI столетий стала, будто бы, следствием развития современной математики, а основные технологии разработки программного обеспечения, якобы, лишь воплощения абстрактных математических идей. В подтверждение — тонны очевидных фактов, воспоминания великих программеров… Однако это не повод без оглядки принимать ведущую роль математики в компьютерном деле. Действительно, самоотчет компьютерного гуру с точки зрения психологии не более надежен, чем субъективные ощущения последнего ламера, ибо люди крайне редко замечают скрытые мотивы своего поведения: их сознанию доступны только промежуточные цели, небольшая часть культурного фона, который в норме оказывается вне поля восприятия (поскольку любая попытка обратить внимание на условия деятельности означает прекращение этой деятельности и переход к другой, к рефлексии). Когда программист настаивает, что его творения вдохновлены прекрасной математической теорией, — это не более чем поверхностное впечатление, а настоящие источники вдохновения надо искать в других местах. Как правило, математические соображения добавляются к уже имеющейся практической схеме задним числом, в качестве одного из средств продвижения продукта; на самом же деле ни одна компьютерная программа никогда не следует в точности своему математическому «прототипу». Программирование — дисциплина сугубо прикладная, оно не сводится к чистой математике, хотя бы и под маской «компьютерной науки».

Нам указывают, что сами слова «вычисление», «операция», «алгоритм» — пришли из математики, и это весомый аргумент в пользу гипотезы об определяющей роли математики в науке о компьютерах. Но даже если на минутку допустить, что подобные терминологические претензии имеют под собой реальные основания, история слов не совпадает с историей понятий, поскольку одно и то же может быть выражено самыми разными способами — в том числе невербально. На самом же деле, россказни о математических корнях фундаментальных идей вычислительной науки — не более чем фантазия. При более пристальном рассмотрении мы видим как раз обратное: математики лишь изобретают символьное обозначение для того, что давно вошло в практику, стало частью нашего культурного опыта, а зачастую и чем-то чисто житейским. Задолго до любых формальных «доказательств» люди умели убеждать друг друга самим способом действия; очень постепенно некоторые из них проникали в сознание, получали языковые ярлыки и становились опорой формальной (символьной) логики, которая еще через пару тысячелетий была еще больше урезана и превратилась в то, что мы теперь знаем под именем математической логики. Но, если кто зачерпнет из колодца плошку воды, чтобы утолить жажду, вода в колодца от этого не исчезнет, и пользовать ее другие могут по другим поводам. Кое-где в математике проскальзывают альтернативные подходы к идее доказательства — куда больше открытий ждет впереди; это никоим образом не умаляет важности уже известного. Точно так же, понятие алгоритма, формального предписания для решения определенного круга сходных задач, существовало в человеческой культуре с древнейших времен, задолго до первых ростков математической науки. У человека (да и у высших животных) всякое успешное действие имеет свойство тут же становиться шаблоном для других действий. Первобытные люди не могли догадаться о причинах эффективности подобного переноса, внимание вынужденно скользило по поверхности, и пытались в точности скопировать именно эту внешнюю форму, безотносительно к ее практическому наполнению. Полученные жесткие конструкции предписывались обществу властями и освящались попами, входили в быт как веление здравого смысла — и эти общие (типичные) способы деятельности потом получали выражение в искусстве, в науке и в философии. Подобные «технологические карты» абсолютно необходимы на начальных этапах развития разума — однако они играют весомую роль и в современной культуре, обеспечивая устойчивость и преемственность ее эволюции. Но человек творческий не станет чересчур увлекаться формальностями, со всей их впечатляющей продуктивностью. Следовать правилам можно в однородных общественных условиях, на том же уровне культурного развития, — тогда как малейшая искорка новизны автоматически означает отход от традиций. Именно поэтому развитие математики никогда в действительности не следовало формальным требованиям; еще меньше смысла в формальном программировании.

Пошаговые инструкции распространены во многих сферах практической деятельности, весьма далеких от математики. Из области искусства — возьмите, например, уроки рисования или танцев; в магазине любая домашняя утварь снабжена кратким руководством по применению; никакое профессиональное образование невозможно без отработки рутинных приемов. Однако в обычной жизни алгоритмическая сторона никогда не ставится во главу угла, поскольку неожиданные повороты на каждом шагу требуют творческого отклика. Лишь очень простые искусственные построения (вроде математики) допускают значительную степень формализации, а любая реальность намного сложнее сколь угодно навороченных математических фантазмов. Тем не менее, во многих практических ситуациях, мы можем (контролируемым образом) определять уровни значимости, следить за несколькими «основными» параметрами и трактовать все остальное как побочный эффект. Именно так работает любой программист.

Мощь математики напрямую связана с ее стремлением к чрезмерному упрощению. Математика заставляет нас подстраивать наши действия под ее формальные схемы, снижать уровень сложности, — и это, по крайней мере, позволяет чувствовать себя уверенней, намечать пути к решению хотя бы в общих чертах. Разумеется, реальная сложность проблемы от этого не испарится, но мы можем отодвинуть ее на задний план, спихнуть на низшие уровни иерархии. Иными словами, практическая польза математики в повседневной жизни идет от возможности иерархического упорядочения, когда на каком-то уровне есть эффективные алгоритмические процедуры, предполагающие следующий уровень абстракции, и так без конца. Это все тот же вопрос о яйце и курице. Культурный прогресс отражен в математических теориях, которые, в свою очередь, стимулируют культурные сдвиги. Подобная цикличность характерна для всякого развития вообще — что может показаться еще одним свидетельством в пользу особой роли математики. Ну что ж, в какой-то мере это верный портрет старорежимного теоретика, не интересующегося ничем, кроме фундаментальной науки (поскольку ему не приходится в поте лица добывать хлеб насущный). Однако сейчас культура развивается так быстро, что просто нет времени возвести солидный математический фундамент для какой-нибудь весьма типичной последовательности операций, — и приходится либо действовать методом проб и ошибок, либо все-таки приспособить к делу что-то из обычной математики, трезво осознавая, что такие конструкции *ad hoc* могут быть лишь временными и очень приблизительными. В нынешнем изменчивом мире мы ждем от математики принципов, а не решений; это делает ее вполне подобной гуманитарному знанию, где стремление к идеалу важнее точного расчета. Мы видим, как компьютеры постепенно перестают быть всего лишь устройствами для автоматизации вычислений и становятся универсальными средствами контроля; численные оценки при этом сохраняют свое значение лишь на уровне презентаций. В этом плане современные компьютеры гораздо ближе к античным механическим и гидравлическим игрушкам, опыт которых привел впоследствии к автоматизированному конвейерному производству.

Идея вычислительного устройства стала прямым продолжением предшествующего технологического развития, по мере того как рациональное мышление становилось все более формализованным в институализированной науке нового времени. Алгоритмический подход к человеческому творчеству мы видим в творениях первых писателей-утопистов, и эта линия в искусстве получила широкое распространение задолго до соответствующих научных изысканий. Вспомним хотя бы знаменитый моцартовский трактат о сочинении легкой музыки при помощи игральных костей — и аналогичные алгоритмы у его современников и предшественников. Пифагорейская традиция считала математику разновидностью искусства; потом повелось, наоборот, искать причину внутренней целостности и гармонии произведений искусства в априорных математических законах, якобы, изначально свойственных человеческой природе.

В любом случае, нет ничего неожиданного в попытках автоматизации рутинных операций математически нагруженной науки XIX–XX веков, тем более, что счеты и арифмометры давно и прочно вошли в народный быт. Требовалось лишь снабдить механическое устройство независимым источником энергии и скормить ему какие-то программы, в духе того, как работали тогдашние механические пианино и текстильные фабрики. Сам факт сравнительно позднего практического воплощения этой идеи указывает на вспомогательную роль математики (и всей формальной науки) в истории компьютеров: прогресс в этой области определялся главным образом развитием элементной базы, технологиями обработки данных, а не абстрактными правилами и предписаниями. Технологические достижения открывали новые возможности, появлялись соответствующие эмпирические методики — и именно они легли в основание математического программирования, а вовсе не наоборот.

Хотя современная информатика — плоть от плоти «цифровой революции», аналоговые вычисления никогда не утрачивали практического значения и концептуальной насыщенности. Дискретная математика — сравнительно узкое направление в математике в целом, тогда как идея аппроксимации выражает суть всякой науки вообще. Противоположности прекрасно дополняют друг друга и одинаково продуктивны: дискретные алгоритмы часто представляют сплошным потоком данных, а непрерывные процессы исследуют на дискретных компьютерных моделях. Широкое применение компьютеров в современной науке и промышленности главным образом опирается на технологии моделирования, а не на численные расчеты. Но противоположности не могут друг без друга: чтобы слушать цифровую музыку (которую так удобно обрабатывать и хранить), нам требуется-таки аналоговое устройство. В этом контексте традиционная музыкальная нотация и традиции творческого исполнительства можно считать прототипом нынешних компьютерных технологий. В конечном итоге, всякий компьютер — это аналоговое устройство, лишь используемое особым, дискретным образом.

Вот мы и подошли к сути вопроса. Математика существенно статична: она изучает структуры человеческой деятельности. Напротив, программирование целиком вертится вокруг времени: без намеренного упорядочения событий ни о каком вычислении (оперировании данными) и речи быть не может. Чтобы навести мосты, надо как-то учесть временной фактор в математике — и структурировать программирование. Но математическое время может быть только структурным; точно так же, всякая структура в программировании понимается динамически, как типовая операция. Поэтому, едва мы устанавливаем какое-то соответствие между математикой и методами вычислений, оно тут же нарушается — и дает начало новому витку рефлексии.

В качестве иллюстрации, обратимся к процедурам измерения. Всякая такая процедура существенно различает пространство и время. Пространственные измерения всегда статичны (структурны): мы можем свободно перемещаться в пространстве, и это позволяет нам измерять любые расстояния. Со временем все иначе. Чтобы измерить время, мы должны, наоборот, как можно меньше менять пространственное расположение, чтобы избежать влияния таких перемещений на показания часов (будь то гномон, песочные часы, клепсидра, или даже календарь — для более продолжительных периодов). В некотором смысле, именно так мы и определяем понятия «пространство» и «время»: пространство — это то, что есть в каждый момент времени; время — то, что меняется, когда мы остаемся в той же точке пространства. Никакие релятивистские поправки не изменят этого фундаментального различия, которое лежит не в сфере отвлеченной теории, а в области доступных технологий измерения. Релятивизм означает лишь допустимость разных численных представлений (разных способов измерения). Объединяя пространственные и временные меры в релятивистский интервал, мы лишь выражает, в сущности, тривиальный факт: перемещаясь в пространстве, мы вводим некоторую ошибку измерения времени; пространственные измерения в разные моменты времени могут искажать собственно пространственные отношения.

Но как только мы выбрали какой-то инструмент для измерения времени — мы имеем особую структуру, временную шкалу. Любые локальные события можно пометить делениями этой шкалы — *как будто* они взяты одновременно, как точки некоторого пространства. Разумеется, такую структуру может формально присоединить к прежним пространственным измерениям и потом изучать геометрию полученного пространства-времени. Но тогда нам потребуется какой-то другой метод сопоставления разных пространственных точек, другой тип одновременности — и еще одна шкала времени, которая породит свои шкалы, и так далее. Возникающая при этом иерархия пространства и времени допускает разные структурные представления, в соответствии с базовыми методами измерения.

На полях заметим, что в прежние времена, когда наука только зарождалась, всякая временная шкала получала явное пространственное выражение — например, в виде циферблата, на котором моменты разные времени соответствуют некоторым пространственным положениям. Разумеется, конкретная реализация «циферблата» не имеет значения: возьмите, к примеру, обычные часы, где несколько стрелок пробегают свои собственные временные шкалы; в этом конкретном случае одна шкала может быть сведена к другой — но это, вообще говоря, не всегда так. В наши дни индикация времени может быть весьма замысловатой: вместо определенного положения в пространстве можно взять пространственные распределения (по определению, взятые одновременно). В любом случае отметка шкалы времени — это некая виртуальная деятельность, протекающая «мгновенно», по меркам текущей шкалы; собственно, это и есть акт измерения (разметки).

Совершенно то же самое мы видим в процессе вычисления (взятом в самом общем смысле, как последовательность операций с данными). На каждом шаге одна структура порождает другую — однако без отнесения к какой-либо шкале времени невозможно различить вообще никаких структур. События, одновременные на одном уровне иерархии, развертываются в последовательности на другом, и наоборот. Чтобы вычисление стало структурированным (например, чтобы отличать исходные данные от результата вычислений), приходится сравнивать разные вычислительные процессы (benchmarking). Всякая структура имеет смысл только по отношению к деятельности более высокого уровня; всякое упорядочение предполагает свернутые в одновременность деятельности более низкого уровня. Эта иерархическая организация человеческой деятельности по-своему представлена как в математике, так и в программировании, — но также и в любых других сферах культуры.

Измерение в математике

Математики часто изображают свою науку совершеннейшей абстракцией, не имеющей ни малейшего отношения к действительности. Они твердят, что развитие математики следует ее собственным потребностям, безотносительно к практическим потребностям и возможным приложениям. За этим стоит глубокое убеждение в том, что принципы математического рассуждения суть нечто вечное и неизменное, предписанное неизвестно кем раз и навсегда. Опьяненные очевидными успехами формальных методов в науке и в инженерии, математики склонны полагать, что их занятия ведут к высшему (абсолютному) знанию, к окончательным критериям правильности, к истинам в последней инстанции.

Это нагромождение ходячих предрассудков разделяют многие обыватели, которым образование не позволяет заметить их очевидную несуразность. Мудрости нельзя научиться — надо неуклонно идти к ней на протяжении всей жизни. Но такого рода настойчивость не в фаворе, пока в мировой экономике господствует принцип разделения труда. Профессиональные философы плохо осведомлены о реальных возможностях науки; набор случайных сведений, к которому сводится их эрудиция, — не самая подходящая почва для выращивания универсальных идей. Массы держат в невежестве — им не остается ничего кроме веры в деяния признанных авторитетов (или хотя бы тех, кто авторитетно выглядит). Так власти навязывают обществу и непререкаемый авторитет математики.

Но если поближе присмотреться к работе практикующего математика, обнаружится, что это практически ничем не отличается от работы любого другого ученого. Действительно, на основании свойств, общих для объектов некоторого класса, мы пытаемся установить скрытые за ними зависимости; исходя из этого, мы по мере возможности делаем догадки о том, чего пока не установили со всей определенностью. Здесь математика ничем не отличается от физики, химии, биологии, лингвистики, психологии или истории. Более того, то же самое относится ко всякому процессу овладения знаниями — например, в медицине, в писательском деле или в сантехнике. Понятно, что обнаруженные закономерности не с неба падают — они обусловлены природным порядков вещей и наличествующими в культуре способами их использования. Разные отрасли учености выделяются лишь по их предмету и области приложения.

Значит, задумываясь о природе математики, мы должны, как минимум, определиться с ее предметной областью. Детали придут потом — но общее направления следует выбрать с самого начала, поскольку в противном случае никакую деятельность просто не с чего начать.

Никто не спорит: указать предмет математики — задача не из простых; битвы гигантов по поводу оснований математики всем известны, равно как и горькие разочарования, крушение иллюзий. Как обычно, дело осложняется тем, что математические идеи всегда в процессе развития: меняется как словесное оформление, так и само их содержание, — и выявить связь современных кирпичиков математического знания с их древними прототипами бывает нелегко.

Так, сегодня мы легко усматриваем нечто общее между 3 яблоками и 3 камнями. Чуть большего напряжения требует признание сходства набора из 2 камней и 1 яблока с набором 3 камней (или 3 яблок), но такое признание сразу же относит к той же категории и набор из 1 камня и 2 яблок, и, скажем, 1 камень, 1 яблоко и 1 птица. При некотором навыке, мы можем также полагать, что абстракции вроде 3 дней или 3 желаний попадают в тот же ряд. На практике такие связи возникают путем сопоставления разных наборов вещей (или идей) с одним и тем же «эталонным» набором (например, 3 пальца). Последний штрих — устранение всякой вообще предметной опоры и переход от абстракции *числа* 3 как общей характеристике наборов трех любых сущностей, хотя бы и очень разных по природе. Такое метод установления универсальной всеобщности называется *количественным* подходом.

Мы можем пойти другим путем и сосредоточиться на самом акте различения, признания индивидуальности в вещах; в этом случае вещи становятся *качественно* различными — и потому несравнимыми. Очевидно, абсолютное различие предполагает столь же абсолютное тождество: невозможность сравнения не дает нам никакого основания для установления различия или сходства. Все уникальные вещи, поэтому, можно считать совершенно неразличимыми, ничем не отличающимися одна от другой. Это приводит к еще одному базовому понятию математики — к индивиду вообще (точка, элемент, операция, связь, значение), — к тому, что можно считать. В частности, мы умеем считать числа.

Количественный и качественный аспекты внутренне взаимосвязаны; на практике, одно не бывает без другого — в любой деятельности. Говоря о сходстве, мы имеем в виду различие; говоря о различии — подразумеваем единство. Количественные уровни мы устанавливаем в пределах того же качества, а всякое качество сохраняется лишь в каких-то количественных пределах. Но это означает, что всякая вещь может быть охарактеризована с еще одной стороны, что и позволяет отличать качество от количества и говорить о них в одном контексте. Только по отношению к этой общей основе какие-то аспекты целого можно называть количественными, а какие-то другие — качественными. В философии такое единство качества и количества называется *мерой* (не путать с одноименным математическим понятием!). Определение меры чего-либо и есть акт *измерения* в самом широком смысле.

Чтобы измерение стало возможным, надо, чтобы различные вещи могли считаться до какой-то степени одинаковыми, то есть, соизмеримыми. Такая возможность заложена в самой организации человеческой деятельности, которая всегда начинает с некоторого объекта и производит некоторый продукт. Продукт можно считать своего рода материальным воплощением (реализацией) меры, поскольку любые объекты в рамках данной деятельности сопоставимы в их отношении к продукту: они либо годятся для его производства, либо никак не участвуют в нем, — плюс всевозможные промежуточные варианты.

Качество и количество — противоположные стороны меры, и потому их различие лишь относительно. Та же мера позволяет сравнивать вещи в каком угодно другом аспекте, не меняя общего результата. Это утверждение почти тривиально, поскольку выход измерения (количество) существенно зависит от метода измерения (качество). Ту же работу можно сделать разными способами. В зависимости от того, как мы различаем вещи, мы будем по-разному их считать.

Поскольку универсальность — одно из основных определений субъекта, любые две вещи в мире могут в каком-то контексте оказаться сравнимы. Однако сравнение предполагает соответствующую меру, а мера эта устанавливается в практической деятельности. Получается, что диапазон реальной сравнимости вещей связан с текущим уровнем культурного развития. То есть, если нам в голову пришло сопоставить одно с другим, для этого есть соответствующие общественные предпосылки; ни одна идея не возникает просто так, без ощутимого культурного толчка. Разумеется, было бы глупо каждое математическое понятие выводить из материального производства: всякая деятельность в определенных культурных условиях может породить своего рода индустрию, воспроизводящую культурные связи более высокого уровня; такую деятельность мы называем рефлексией. В частности, продукт, играющий роль меры, не обязан быть чем-то, что можно потрогать: иногда это лишь сложная взаимосвязь вещей, которую почти невозможно овеществить или обозначить. Тем не менее, культурная обусловленность формальных операций неустранима даже в самой абстрактной науке.

В известной мере, все объекты в области соизмеримости могут представлять друг друга, «обмениваться» друг на друга — как товары на рынке. Любой из них можно принять за единицу измерения — а все остальные выражать в этих единицах. Таких частных реализаций измерения может быть много, поскольку всякий иной объект, взятый в качестве единицы, порождает свою собственную *шкалу* — а все остальное оценивается с точки зрения принадлежности той или иной *ступени* этой шкалы, которая, таким образом, становится общей мерой для всех объектов того же уровня. Так всякая мера порождает *иерархию* шкал, крайне гибкую и многообразную, где любое представление измерения развертывается в некоторую иерархическую структуру, в конечном итоге связанную со строением порождающей деятельности. В качестве первого приближения, именно эти иерархические структуры можно считать предметом математики как науки. Каждая математическая теория относится к определенному классу типовых структур, разных способов организации человеческой деятельности.

В качестве одной из возможных деятельностей, сама математика устроена иерархически, что позволяет обсуждать в математике ее собственные структуры. Отсюда иллюзия, якобы, исключительной роли математики в науке. Но любая другая наука устроена так же: она изучает нечто, частью (или представителем) чего является она сама. Наука целиком стоит на обратной связи от своей предметной области — она обязательно включает ее в себя, но организует контролируемым образом. Можете представить себе физика, который не был бы физической системой? Или биолога, который не был бы организмом (или сообществом организмов)? Экономическая наука активно ввязывается в товарный обмен; психология требует интеллекта и эмоций; лингвисты общаются на разных языках; геология развивается на планете Земля. Различие только в характере рефлексии: в математике она часто (хотя и не всегда) оказывается явной и намеренной.

В таком контексте, можно представлять себе измерение как разновидность категоризации: шкала задает некоторое количество категорий (ступени шкалы), а каждый единичный акт измерения призван отнести нечто к одной их этих категорий. В повседневной жизни это одна из самых распространенных операций, и мы даже не замечаем ее культурной обусловленности, существования деятельности более высокого уровня. Категоризация — очень непростое дело. Предстоит исторически (практически) установить некий культурный шаблон (иерархию шкал) на основании простого сравнения (различения) вещей в их отношении к продукту некоторой деятельности. Нечто подобное можно наблюдать и у животных: они способны сразу оценить биологическую важность стимула и предпринять адекватные шаги — но они никогда не строят собственно шкал (за исключением некоторых иерархически организованных сообществ с подвижным распределением по уровням — прототип человеческого общества). Грубо говоря, прежде чем мы сможем отнести что-либо к некоторой категории, эта категория уже должна существовать в качестве устойчивой социальной (идеальной) связи. Как только набор категорий становится частью «решателя» — о категоризации в собственном смысле слова можно говорить лишь метафорически. Это касается и приобретенных «категорий», усваиваемых в ходе обучения или встроенных в психику и нейронные структуры: какими бы общественными ни были их истоки, такие «психические инструменты» мало отличаются от телесных органов, а недостаток гибкости ощущается как безответственность и несвобода. С точки зрения иерархического подхода это предпочтение одной иерархической структуры в ущерб развертыванию всех остальных, затрудненность обращения иерархий.

Следует подчеркнуть, что измерение (любого вида) — это не главное в человеческой деятельности, и часто люди предпочитают обходиться без него. Есть и другие оценки, столь же важные для полноты нашего опыта. Например, чтобы решить, все ли члены семьи собрались к ужину, нам вовсе не надо их пересчитывать: мы обнаруживаем чье-то отсутствие с первого взгляда. Точно так же, незачем пересчитывать пуговицы на сюртуке, чтобы выяснить, что одной не хватает. Точная форма подушки не имеет особого значения — лишь бы спалось хорошо. И нам глубоко безразлично, сколько истины в чьих-то словах, когда дело лишь в том, чтобы выразить взаимную симпатию или отвращение. Есть этносы, у которые так и не сложились общие идеи числа или формы — не от неспособности или отсталости, а просто потому, что в них, при соответствующем образе жизни, нет никакой практической пользы. Точно так же, маленькие дети безразличны к количественной стороне действительности — пока культура не втянула их в специфические общественные отношения (что и называется взрослением). Даже в науке масса фактических данных или навыки операций первоначально копят, не озадачиваясь формальными различиями; именно так, по большому счету, и возник метод современной математики. Однако философские категории «качество», «количество» и «мера» выражают один из фундаментальнейших аспектов организации мира (в том числе и вне какой-либо человеческой деятельности) и универсально применимы: все что угодно возможно (хотя и не всегда нужно) измерить (сравнить, категоризовать, оценить) — не забывая и об остальных способах действия.

Я так долго занимаюсь всеми этими предварительными соображениями, потому что в деталях описать особенности математического измерения не составляет больших трудностей —

как только мы вполне понимаем их культурную обусловленность. Всякий математик увидит формальную сторону картины практически сразу; не столь привычным к формализации придется немного повспоминать школу. Убедить в чем-то активно работающего в науке — почти безнадежное дело, поскольку многочисленные формальные навыки уже проникли в самую сердцевину его личности, стали его частью. Ну и славно, пусть себе делают то, что считают нужным, не заморачиваясь поиском оснований — что было бы не лучшим применением таланта.

Нет никаких ограничений на то, как будет устроена та или иная шкала; любая связана с каким-то способом измерения. Всякая деятельность допускает много формализаций — каждая из которых отвечает одному из возможных способов развертывания иерархии. Самые фундаментальные математические понятия можно пересматривать точно так же, как и какие-нибудь вспомогательные построения. Приведенный выше пример с абстракцией числа сразу обнаруживает многочисленные концептуальные неувязки. Например, единообразная трактовка всевозможных единичностей опирается на практически сложившиеся формы счета, а процедура измерения требует соотнесения отдельных предметов с отметками некоторой стандартной шкалы (в общих чертах, представляющей собой набор эталонов, расположенных в определенном порядке). То есть, счет предполагает перечисление. Натуральные числа как математический конструкт дают некую абстрактную шкалу, не зависящую от конкретных реализаций. Но на практике измерение опирается не (непосредственно) на эту абстракцию, а на некоторую ее реализацию, от пальцев или костей на счетах — до типов нервного возбуждения в мозгу, людей в очереди или итератора в компьютерной программе. Ни одно из таких «воплощений» не может быть идеальным. Человечеству потребовались многие столетия, чтобы выработать относительно устойчивые процедуры, и нет никакой гарантии, что это привычные операции не окажутся неуместными в каких-то экзотических условиях, требующих совсем иного подхода. Возьмите хотя бы счет на пальцах — и представьте, что разные люди имеют разное количество пальцев, а то и вовсе ни одного.

Даже если допустить, что материальная реализация шкалы (технология счета) вполне адекватна, остается проблема порядка пересчета: возможно ли расположить пересчитываемые предметы так, чтобы последовательно соотносить их с отметками шкалы — и последнюю отметку принять за искомый результат? Обычно об этом заботиться не нужно, поскольку во многих практических ситуациях итог не зависит от порядка пересчета. Но в общем случае речь идет о еще одном итераторе, извлекающем объекты из интересующего нас набора один за другим, что и позволяет нам двигаться в процессе измерения вдоль шкалы. Это далеко не тривиальная процедура: результат вполне может зависеть от порядка измерения. Например, элементы последовательности могут «склеиваться» при определенном расположении — и никак не взаимодействовать при другом. Возьмите, к примеру, последовательность букв, которые в процессе «предъявления» могут складываться в слова — или не складываться. Если, по каким-то соображениям, мы считаем слова как самостоятельные единицы, результат счета существенно зависит от порядка выборки. Еще один типичный пример — объекты с конечным временем жизни, постепенно выбывающие из исходного набора (например, по типу радиоактивного распада). Если мы начнем счет с долгоживущих элементов, короткоживущих мы просто не заметим.

Продолжая тему времени, заметим, что результат измерения зависит также от темпа перечисления как для исследуемого набора, так и для шкалы. Если выборка происходит слишком быстро, по сравнению с временем категоризации (соотнесения со шкалой), некоторые элементы не будут учтены при пересчете. В самом тяжелом случае, время категоризации зависит и от очередного элемента выборки: некоторые из них труднее обрабатывать из-за их размера, веса, подвижности или культурных зависимостей. Обратный случай: шкала время от времени может порождать пакеты «спайков», так что один и тот же элемент будет посчитан несколько раз — что в математике соответствует, например, такому примитиву как множество с повторениями (bag). «Классическая» деятельность пересчета должна, как мы видим, происходить в «адиабатическом» режиме, чтобы между двумя последовательными актами выборки оба итератора успели прийти в некоторой «нейтральное» состояние. Всякий, кто когда-либо занимался программированием (особенно для сетевых приложений), знает, что добиться этого бывает очень непросто.

Мы естественно приходим к заключению, что математическое понятие числа соотносится с очень частным способом действия, ограниченным во многих отношениях. Да, в нашей культуре такие действия встречаются повсеместно; однако в каких-то других культурах (или на других уровнях культуры) дело обстоит иначе — и там сама идея числа может оказаться неуместной. Разумеется, это не означает невозможности математики вообще — просто основана эта математика будет на принципиально других математических мерах.

Математик может возразить, что его наука не обязана заботиться о приложениях или практической реализации — что его дело просто исследовать формальные зависимости. Но математика — тоже деятельность, и ей приходится сталкиваться с теми же проблемами, что и всем остальным. Пресловутые теоремы Геделя — наглядный пример того, как некорректная арифметизация порождает иллюзию соизмеримости там, где ее вовсе нет. Есть основания полагать, что любые «диагональные» доказательства выявляют на самом деле ограниченную применимость математической теории.

Для иллюстрации, приглядимся к различию порядковых и кардинальных чисел. Как уже говорилось, счет предполагает упорядочение, когда числовая шкала используется «ординально», как порядок, наложенный на некоторую коллекцию. Если способ упорядочения нам не важен (и, в частности, дает одинаковый результат при счете), можно расценивать количество элементов как кардинальное число, характеристику коллекции в целом, как ее «объем» (или «массу»). Хотя формально такие «объемные» характеристики выражаются такими же числами, они отвечают совсем другому подходу к измерению, который не требует различения индивидуальных элементов в составе целого. Вместо того, чтобы пересчитывать кирпичи в куче, мы можем просто взвесить кучу целиком и оценить количество кирпичей косвенно, зная вес одного кирпича. В качестве альтернативы, можно, например, измерить длину кирпичного бордюра, сложенного из кирпичей из этой кучи, — и оценить количество кирпичей, зная размер одного кирпича. Понятно, что соотнести массовые меры с ординальными удается далеко не всегда: так, если речь идет о куче камней (а не стандартных кирпичей) разной массы и размера, массовые меры почти не несут информации о ее содержимом.

В физике обычно различают интенсивные (температура, давление, энтропия) и экстенсивные (масса, объем) характеристики: первые относятся ко всей системе целиком; вторые складываются из соответствующих количеств для частей системы. Очевидные аналоги интенсивных мер в математик: размерность пространства, топологический индекс, моменты статистического распределения, алгоритмическая сложность. Даже если мы разделим математический конструкт на несколько «меньших» того же типа, величины интенсивных параметров для частей нетривиальным образом соотносятся с параметрами целого. Допустим, прямоугольник разбит на несколько (непересекающихся) прямоугольников; тогда отношения длин сторон каждой из частей не имеют ничего общего с таким же отношением для исходного прямоугольника — при том, что сумма площадей частей равна площади целого. Промежуточный случай: сумма периметров частей не равна периметру исходного прямоугольника — но пропорциональна ему при некоторых способах разбиения.

Интенсивные характеристики соотносятся с идеей *формы*, дополняющей в математике идею числа. Для форм справедливы те же замечания о тождестве и различии. Можно в общих чертах описывать вещи как «округлые», «прямоугольные», «нерегулярные» и т. д. Мы отличаем гладкость от изрезанности, хаотичность от упорядоченности, сходство от различия, неудачу от успеха… Во всех этих случаях речь идет о том, чтобы взять несколько разных вещей, но работать с ними примерно одинаково. Это делает такие вещи практически идентичными (и допускает количественное их описание), но противопоставляет их все другим вещам, которые нельзя использовать в том же ключе.

В то время как число акцентирует количественную сторону меры, форма, главным образом, говорит о качестве. Можно представлять формы числами, но все такие описания не передают целостности формы — они лишь поясняют, почему наше восприятие различает какие-то формы вещей. Во многих практически важных случаях (при относительной культурной стабильности) можно догадаться о форме по ее численным параметрам. Но это никоим образом не сводит форму к одной из возможных параметризаций; та же форма может возникнуть в совершенно других условиях, когда численные оценки просто невозможны. Обратно, та же комбинация чисел может относиться к разным формам; можно «визуализировать» одну форму при помощи другой — но это не делает их эквивалентными во всех отношениях. Иначе говоря, форма есть сущность более высокого уровня по отношению к любой параметризации, и определяется она не численными оценками, а отношением к другим формам. С другой стороны, параметризованная форма становится формой другого уровня, абстракцией, типом — поскольку из всех черт выбраны лишь некоторые; это, так сказать, «форма формы». Точно так же мы представляем точки пространства координатами — и переходим к абстрактным точкам абстрактного пространства.

Диапазон возможных качеств, конечно же, формами не исчерпывается. Например, мы чувствуем нечто общее у двух яблок — что отличает их, скажем, от ежей. Далее, есть разные сорта яблок, и даже яблоки одного сорта подразделяются на категории. Всякая индивидуальная вещь так или иначе отличается от любой другой вещи — поэтому мы и говорим об индивидуальности. Но в определенной мере ее количественный аспект будет относится к общности индивидов, превращая их в то, что можно считать. Можно было рассматривать форму как *формальное* («количественное») качество, абстрагированное от конкретных мер, — так же как число становится абстракцией количества. В этом формальном смысле яблоки и ежи вполне объединяются в категорию «приблизительно круглых» предметов, и можно их пересчитывать в одном ряду. Именно в таких ситуациях математика оказывается на высоте.

Формы и числа можно сравнить с физическим пространством и временем. Так же, как в физике, составляющие формы легко упорядочиваются (и тем самым «пересчитываются») в нечто вроде траектории (порядок «ощупывания»), и наоборот, класс траекторий представляет определенную протяженность или длительность (число). Та же взаимность: необходимость различения — и его относительный характер. И так же, как время связано с цикличностью воспроизводства мира (или какой-то его части), возможность счета проистекает из повторяемости операций в человеческой деятельности. В каком-то смысле, математику можно назвать моделью культурного пространства-времени как уровня пространства-времени вообще.

Уподобляя форму интенсивным характеристикам физических систем, мы приходим к весьма общей идее, приложимой к самым абстрактным сущностям. Так, математические теории (и их элементы) можно сопоставить с некоторой мерой истинности, которая, очевидно, есть интенсивная характеристика — так что истинность фрагментов теории не гарантирует ее истинности в целом. Здесь, как и физике, мера в приложении к целому имеет иной смысл, нежели та же мера, приложенная к его частям; так развертывается иерархия мер. В частности такова иерархия истинности, представляющая форму математической теории. Разумеется, та же теория может быть формально представлена разными интенсивными мерами (вроде разрешимости, продуктивности, эффективности, предсказательной способности и т. д.). С разных позиций теория выглядит по-разному. Ее «частные» формы не будут совершенно независимыми. В каких-то условиях интенсивные характеристики переходят в экстенсивные, и наоборот. Так, масса составной частицы в нерелятивистской классической физике складывается из масс компонент, тогда как масса атомного ядра не сводится к массам отдельных нуклонов. Сложная система в каком-то контексте ведет себя как целое — а в другом лишь меняет форму. Кроме того, последовательность изменений может существенно зависеть от истории системы. Но точно так же и математическая теория может соотносить интенсивные меры друг с другом, эффективно делая их «менее интенсивными». В контексте некоторой теории, два утверждения (истинные или ложные) соединяются (логическими связками) в новое суждение, так что истинность составного суждения выводится из истинности компонент. Наборы доступных связок определяют форму теории (и порождают эквивалентные формулировки); типичная задача математика — найти диапазон конструктов, сохраняющий ту же общую структуру, которая, впрочем, не задана изначально, а возникает процессе построения теории — точно так же, как и в других науках.

Нелогичная диагональ

Формальность математического знания — это одновременно и его главное достоинство, и основной источник концептуальных проблем. Пока математик занимается исследованием конкретного математического объекта, он может (как и в любой другой науке) не задумываться над корректностью типовых операций. Однако любая попытка формально описать саму формальность, сделать научный метод предметом научного исследования — заранее обречена на провал. Такая формализация неизбежно окажется неполной, она выделяет лишь одну сторону, один уровень научной работы, абстрагируясь от разного рода неформальных процедур — а именно они делают математику содержательной.

Основания математики — вне математической науки, и никакие метатеории здесь не помогут. Это просто другой уровень рефлексии, заниматься которым наука вообще не должна. Разумеется, во всякой деятельности есть формальные компоненты, которые укладываются в нормы научности — и которым можно научиться. Собственно, вся наука — это фабрика технологий, типовых схем деятельности, воспроизводимых при самых разных обстоятельствах, и в том числе — в самой науке. Научный продукт, знание — это, по сути, большой учебник, кулинарная книга с миллионами типовых рецептов получения приемлемого результата в обычно встречающихся житейских ситуациях. И в этом плане математика ничем не отличается от химии, политической экономии, анатомии, хореографии или разведения роз.

Выделение формальной структуры в какой-либо реальной деятельности предполагает определенный уровень абстракции, по отношению к которому одни стороны действительности считаются существенными, а другие нет. Возникают эти уровни в истории культуры не случайно, однако в пределах общей закономерности возможны какие угодно вариации (для которых также есть иерархия формальности и содержательности). Важно, что разные уровни характеризуются разными формальными особенностями, и не существует застывшего, окончательного знания, поскольку всегда есть возможность перехода к другому способу представления, и практические интересы заставляют нас выходить за рамки устоявшихся теорий.

Формальное знание возможно лишь поскольку мы остаемся в пределах одного уровня иерархии. Чисто формальное объединение нескольких уровней в математике проявляется как противоречие.

Популярный пример — знаменитые теоремы Геделя. Сегодня они формулируются в самых разных терминах, не обязательно сводимых к арифметике, как в первоначальном варианте. Обычный читатель находит эти теории слишком техническими, они перенасыщены частными деталями и не вызывающими доверия искусственными конструкциями *ad hoc*. Очень уж все это напоминает антураж фокусника, отвлекающий внимание публики от механики трюка.

А суть дела совершенно проста. Всякая формальная система представляется как набор утверждений,[1] каждому из которых приписывается логическое значение «истина» или «ложь». Если выясняется, что одному и тому же утверждению приписаны сразу два значения, такая система называется противоречивой. Но это структурный уровень. Системность предполагает вход и выход, и возможность получения результата по исходному состоянию в соответствии с некоторым набором правил, описывающим внутреннее устройство системы. Строение

[1] Я употребляю собирательный термин «утверждение», имея в виду такие «ассерторические» высказывания, которые фиксируют элемент знания, — в отличие от других высказываний, передающих, например, вопрос, сомнение, побуждение и т. д. Термин «высказывание» в этом контексте значительно шире. Кроме того, я говорю о «суждениях» как об утверждениях особого рода, касающихся формально-логической оценки других утверждений. Есть еще термин «предложение», который в математике часто означает утверждение, подлежащее выводу. Однако я предпочитаю называть предложениями любые относительно замкнутые фразы языка теории, безотносительно к тому, являются они высказываниями или нет.

формальной системы определяется заданием правил вывода, позволяющих по некоторому набору истинных утверждений построить другое истинное утверждение. Конечно, можно применять правила и к ложным утверждениям — однако тогда мы ничего не можем сказать об истинности результата. Для каждой формальной системы возникает, таким образом, понятие *выводимости* — и надо выяснить, как оно соотносится с *истинностью*. В частности, формальная система называется полной, если любое истинное утверждение в ней выводимо.

Понятно, что выводимость — это как бы истинность более высокого уровня, следующий уровень иерархии, который в диалектической логике называют отрицанием отрицания. В отличие от непосредственно истинных утверждений, выводимые утверждения истинны не сами по себе, а *посредством вывода*. На практике, разумеется, можно одно и то же утверждение либо объявить аксиомой, либо вывести из других аксиом; это различные представления (иерархические обращения) той же формальной системы. В любом случае, истинность и выводимость — разные уровни, и смешивать их в рамках одного суждения было бы непоследовательно. Но именно этим и занимаются все разновидности теоремы Геделя!

Механика фокуса основана на так называемом диагональном принципе: утверждение отрывается от своей содержательной стороны, от предметной области, и объявляется формально применимым к чему угодно — в том числе, к самому себе. Тысячи лет таким образом в логике воспроизводится пресловутый парадокс лжеца, на все лады перетолкованный в популярной литературе.

Теорема Геделя (в любой формулировке) предполагает искусственное конструирования рефлексивного суждения, по смыслу означающего: «всякое выводимое утверждение ложно». Если это утверждение выводимо — то оно оказывается одновременно и истинным, и ложным, так что формальная система противоречива. Если оно истинно — то оно не выводимо, и формальная система неполна.

Вот, собственно, и все. Остается только выяснить, каким образом фокусники отвлекают внимание публики.

Для этого в математике (и философии позитивизма) есть стандартный прием: утверждения отождествляются с формой выражения. Нормальному человеку такое обычно в голову не приходит. Когда он говорит: «это яйцо варилось три минуты» — он имеет в виду именно яйцо, и кипящую воду, в которой оно находилось три минуты по показаниям кухонного таймера. А вовсе не набор слов, которым этот факт выражается.

Математик поступает с точностью до наоборот: он заявляет, что любое формальное утверждение существует лишь поскольку оно может быть выражено на некотором формальном языке — и все утверждения можно перечислить, как только мы задали алфавит этого языка. Перевод с одного языка на другой при этом сводится к простой подстановке одних символов вместо других по определенному правилу — и никак не отменяет самой возможности перечисления.

Звучит очень убедительно. Публика зачарована ловкими движениями, которые фокусник использует, чтобы явным образом сконструировать язык и сформулировать на нем теорию, в конечном итоге приводящую к вышеприведенному диагональному утверждению. И в итоге теорема Геделя воспринимается как изящный математический результат, откровение высокой науки.

Хотя как раз науки в этом меньше всего. Наука всегда предметна, она изучает что-то определенное — и высказывается не вообще, а только в пределах своей предметной области. Если мы начинаем обращать внимание на способ получения и представления научных фактов — мы занимаемся уже совсем другим делом; в пределах науки в целом это означает переход от одной предметной области к другой — то есть, от одной частной науки к другой. Смешивать понятия этих разных наук мы не имеем права, даже если соответствующие высказывания звучат похоже, — это банальная логическая ошибка, называемая подменой термина: под одно и то же слово (знак) в пределах одного рассуждения подставляются совершенно разные понятия.

Собственно, к этому и сводится гениальная идея Геделя: все утверждения (которые отождествляются с их формулировками) можно закодировать числами, правила вывода тоже кодируются числами — и любые высказывания в результате сводятся к высказываниям о числах. А поскольку числа — они и в Африке числа, то мы имеем право их сопоставлять как угодно, в том числе диагональным путем. Характер такой логики можно проиллюстрировать простым примером: пусть четные числа относятся к высказываниям о съедобных вещах, а нечетные — о несъедобных; тогда, если купить в магазине две несъедобные вещи, можно сложить их вместе и как следует перекусить…

Еще очевиднее обман становится в следующей формулировке: поскольку все слова записываются одинаковыми буквами — они все означают одно и то же.

Если в математике оставаться в рамках научности — особых проблем не возникает. Даже школьник знает: всякая функция имеет свою область определения. За случайный выход за пределы области определения в школе ставят двойки. Но когда математик приканчивает высшее образование и выходит в самостоятельное творчество — о таких мелочах можно и забыть. Например, в теории категорий многие теоремы доказываются очень лихо — в предположении, что все стрелки (в каком-то смысле) хорошо определены. В конечном итоге результат как раз и определяет способ задания стрелок, который неявно предполагался с самого начала. Это еще одна распространенная ошибка — логический круг, другая сторона диагонального принципа.

Научная теория строит содержательные утверждения по поводу некоторой предметной области — и устанавливает их соответствие действительности, то есть истинность. Формально это выглядит как задание функции истинности на пространстве возможных утверждений X:

$$t : X \to \{\mathbf{F}, \mathbf{T}\},$$

где **F** и **T** — значения истинности (в каких-то ситуациях этих значений может быть больше). На самом деле такая формализация справедлива не всегда — но об этом потом. Выводимость, в тех же условиях, формально определяет другую функцию:

$$d : X \to \{\mathbf{F}, \mathbf{T}\},$$

при условии, что

$$d(X) = \mathbf{T} \Rightarrow t(X) = \mathbf{T}.$$

Геделево утверждение тогда, не вдаваясь в дополнительные уточнения, можно записать как

$$d(X) = \neg t(X).$$

Но последние два функциональных соотношения *не* принадлежат области определения функций t и d; их область определения — пространство функций на пространстве X. А это уже совсем другая наука… А может быть, даже и не наука — если не получится указать предметную область, по поводу которой формулируются подобные утверждения.

Математический фокус теоремы Геделя, смешение несопоставимых утверждений в одной теории, широко применяется и в других областях математики. Достаточно вспомнить хотя бы великую теорему о неподвижной точке, рассматривающую отображения n-мерного шара в себя

$$f : B^n \to B^n$$

и утверждающую, что всегда найдется точка x, для которой $f(x) = x$. Здесь смешиваются в кучу область определения и область значений функции, хотя с научной точки зрения совпадать они никак не могут — поскольку, метафорически используя физическую терминологию, у них разные размерности: $[x] \neq [f]$. Грубо выражаясь, они стоят на разных концах стрелки, и это различие в позиции делает их качественно различными. Когда мы говорим, что некоторое пространство отображается в себя, это уже маленькое жульничество, поскольку мы отождествляем *разные аспекты* (или разные употребления) одного и того же. Такое *приведение* области значений функции к ее области определения есть, вообще говоря, нетривиальная операция, которая не вытекает ни из какой математики — а привносится в науку *из практики*. Если мы по жизни умеем делать продукты нашей деятельности объектами для другой деятельности — тогда пожалуйста, применяйте вашу формальную систему. Если же такое использование возможно с ограничениями — извольте быть осторожнее в выводах. Собственно, поэтому и приходится теоретические предсказания все время проверять на опыте; сами по себе они лишь гипотезы — хотя бы и железно следующие из всей предыдущей науки.

Отождествление области определения функции с ее областью значений сродни уже упоминавшемуся логическому ляпу с подменой термина. Действительно, если значения аргумента функции можно обозначить точно так же, как значения ее результата, одинаковые *обозначения* все равно ссылаются на разные *объекты*. Если мы пронумеруем пальцы на руках числами от 0 до 9, и точно так же пронумеруем пальцы на ногах — от этого ни руки не станут ногами, ни наоборот. Надо еще постараться придумать такую практическую ситуацию, в которой пальцы на ногах и на руках можно было бы реально отождествить (хотя, в данном случае, это все-таки возможно).

Математики обычно обозначают подобные трюки словечком «изоморфизм». Достаточно сказать, что пространство значений совпадает с пространством аргументов «с точностью до изоморфизма» — и, вроде бы, дело сделано, дальше можно ни о чем не заботиться… Однако на самом деле, чтобы подать сигнал с выхода системы на ее вход, приходится задействовать вполне материальную цепь обратной связи — и если такой цепи нет, формальная математическая теория просто неприменима. По счастью, развитие математики идет не по прихоти ее столпов, а следуя потребностям и возможностям практики. Если математику что-то пришло в голову — это чему-то в культуре соответствует. Правда, не всегда чему-то положительному. Например, та или иная математическая идея может быть выражением типичной (методо)логической ошибки.

В качестве еще одной иллюстрации, поговорим о компьютерах. Во многих языках программирования различают *значения* и их *типы*. Например, число 1 в целой арифметике — это совсем не то же самое, что вещественное или комплексное число 1, они могут синтаксически в языке представляться одинаково (динамическое выведение типов) — но внутреннее представление их совершенно различно. Не говоря уже о возможных отождествлениях числа 1 с соответствующим кодом ASCII или с текстовой строкой «1». В объектно-ориентированном программировании типы представлены классами, а значения — экземплярами класса. У одного класса может быть сколько угодно экземпляров — и это совершенно разные объекты, никак друг с другом не связанные. Однако все они «изоморфны» друг другу, поскольку их внутреннее представление (набор свойств) сходно, и с ними возможны сходные операции (методы класса). Попробуйте спутать в программе два разных объекта одного типа — и потом придется прыгать с дебаггером и отлавливать глюки. Математические глюки отлавливать сложнее — хотя происхождение их, в общем-то, того же свойства. Тут вмешивается еще и психологический фактор — традиционный пиетет публики перед математической «строгостью», доходящий до почти полной неспособности сомневаться в предъявленных «доказательствах». Особенно если учесть, что понимать математические рассуждения (битком набитые ссылками на кем-то ранее полученные результаты — которые приходится принимать на веру) способны далеко не все.

Но вернемся снова к науке. Как отмечалось, всякая теория занимается построением утверждений о некоторой предметной области, которые потом исследуются на предмет правильности или истинности (что не одно и то же). Традиционная математика смело объявляет все эти утверждения изначально заданными и неизменными. И в науке мы, дескать, только «открываем» всяческие истины. На практике, как мы знаем, дело обстоит совершенно иначе. Развитие любой науки — сложный и драматичный процесс, и далеко не всегда очевидно, куда нас приведет то или иное направление исследования. Область применимости науки не существует сама по себе, подобно платоновской идее, — она формируется вместе с самой наукой. Но если ограничиться чем-то попроще, доступным пониманию математиков, — можно сказать, что *утверждения* теории надо еще построить из ее элементарных *понятий*. Понятия эти могут быть адекватными и не очень. Соответственно, утверждения можно строить правильно и неправильно — то есть, что-то в данной науке можно утверждать, а что-то нет. Невооруженным глазом видно, что мы опять приходим все к той же геделевой схеме, согласно которой некоторые осмысленные утверждения окажутся невыразимыми в терминах теории либо противоречивыми.

Надстраивать над такой неполной или противоречивой системой еще и неполную и противоречивую логику — занятие, по меньшей мере, странное.

В этом контексте «лингвистический» фокус уже не кажется столь убедительным. Почему, собственно, мы считаем, что алфавит задан раз и навсегда? В жизни так бывает редко, и все время приходится изобретать новые знаки для чего-то такого, чего раньше просто не было. В частности, такое знакотворчество может заключаться в *переосмыслении* уже имеющихся знаков при использовании их в разных контекстах. Количество знаков потенциально бесконечно — хотя всегда можно *закодировать* их конечным числом элементов. Достаточно лишь, чтобы конечный код ссылался на (представлял) что-то бесконечное, причем по-разному в разных контекстах. А контекстов может быть сколько угодно… В результате трюк Геделя с арифметизацией логики становится просто невозможен. И надо честно признать, что математика — такая же наука, как и все остальные, что математические теории справедливы только в области своей применимости, ограничены объектами определенного типа. Претензии на царство отменяются — точно так же, как претензии физики на теорию всего.

И вот в таком, собственно научном исследовании диагональный принцип оказывается очень даже полезен — если не преувеличивать общности получаемых выводов. И оказывается возможным — в каких-то практических ситуациях — отождествлять изоморфные пространства. И можно строить — в ограниченных рамках — рекурсивные теории и программы. Но если где-то не срастается, если результат не вяжется с нашими житейскими представлениями, не надо сразу вставать в позу пророка и кивать на недоразвитость обывателя; быть может, что-то неладно в самом математическом королевстве. И тогда следует отказаться от некоторых, вроде бы, самоочевидных отождествлений — и честно расставить математические конструкции по разным уровням иерархии. Тогда и математике будет куда расти.

авг 2009

Прямая и круг

Пока человек не стал математиком, он интуитивно противопоставляет две стороны всякой деятельности: либо мы продвигаемся поэтапно от одной цели к другой — либо многократно воспроизводим одно и то же, уходя от равновесия — и возвращаясь к нему. Метафорически это можно мыслить как противоположность прямой и круга, поступательного движения и вращения. Конечно, воспроизводство предполагает производство (чтобы сделать нечто заново, надо его, как минимум делать), а производство опирается на воспроизводство производственных условий, технологические стандарты (типовые операции). Но тождество возникает каждый раз на ином уровне, нежели различие, и устанавливается путем обобщения (культурной ассимиляции) многократных переходов одного в другое, как единство различного. Когда математика игнорирует подобные (качественные) различия и пытается все свести к чисто количественным соотношениям, возникают логические неувязки.

Простой пример. Из школьного курса анализа мы узнаем, что всякую периодическую (для определенности, с периодом 2π) функцию можно представить рядом Фурье:

$$f(x) = \frac{c}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx \right),$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам

$$c = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx$$

При этом постоянную c обычно считают частным случаем коэффициентов a_k, подчеркивая, что формула для вычисления $c = a_0$ получается из формул для a_k формальной подстановкой $k = 0$. На первый взгляд — все железно. Только не дает покоя одна маленькая странность: с чего бы вдруг нам приходится пририсовывать к этому члену разложения множитель $1/2$? Коли уж блюсти единообразие, так почему бы не написать с самого начала:

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx \right),$$

учитывая, что $\sin(0 \cdot x) = 0$, и потому значение b_0 может быть произвольным (что, кстати, не менее подозрительно само по себе)? Разумеется, при этом появится «лишний» множитель перед интегралом для a_0 — но почему мы должны добиваться одинаковости формул вычисления коэффициентов, а не универсальности ряда? Студентам над такими проблемами размышлять не по чину — им надо на экзамене отвечать, как предписано. Работающие математики стыдливо заметают вопрос под ковер, ссылаясь на историческую традицию. Но мы-то знаем, что в истории математики новые направления исследования возникали именно там, где люди задумывались над природой необъяснимого произвола: можно так — а можно и по-другому; потом выясняется, в каких случаях надо так, а в каких по-другому. Взять хотя бы пресловутую аксиому о параллельных. Или деяния Архимеда. Блуждающая половинка в теории рядов Фурье вполне может оказаться из той же компании.

В первом приближении: постоянный член разложения очень напоминает постоянную интегрирования. Известно, что неопределенный интеграл дает семейство первообразных, и выбор какого-то определенного представителя этой семьи связан с наложением дополнительных условий (начальных, граничных, асимптотических, …), с подынтегральным выражением никак не связанных.[2] Напрашивается ходячее сравнение суммы с интегралом, переход от рядов к интегралам Фурье и т. д. Но это как-то уж очень примитивно, и мы на фантик не поведемся. Будем копать глубже.

Попробуем зацепиться за качественное различие: переменные величины отличаются от постоянных тем, что они меняются — то есть, от чего-то зависят. Постоянная не зависит ни от чего — в крайнем случае, от чего-то совсем другого, из другой деревни. Когда нам возражают, что постоянную можно рассматривать как частный случай переменной (принимающей все время одно значение), — это больше напоминает не серьезное обсуждение, а известный советский анекдот: линия партии прямая — у нее в каждой точке перегиб. По факту, математические фокусы с отождествлением качественно различных вещей всегда опираются на пошлые логические ляпы, знакомые всем с ранней античности. Например, в данном случае это логический круг: ну хорошо, пусть постоянная — тоже функция, только принимает она всегда одно значение; но откуда нам известно, что это значение только одно? То есть, чтобы определить постоянную как функцию, мы должны уже иметь представление о постоянстве как таковом. Несовпадение постоянства и переменности таким способом не устраняется, а лишь задвигается в другое место — совсем как с блуждающей половинкой в тригонометрических рядах. Другими словами, постоянная — это именно постоянная, а вовсе не периодическая функция (для которой важно не только возвращение к тому же значению через определенный интервал, но и факт регулярного ухода от этого значения — иначе просто неоткуда возвращаться).

Следовательно, введение постоянного члена в тригонометрические ряды идет вразрез с элементарной логикой, со строением ряда (сумма по базису ортогональных функций). Не должно там быть никакого «нулевого» коэффициента — и вопрос о его форме просто не возникает. Разумеется, мы можем оценивать отличие одной функции от другой — и в каких-то случаях свести его к числу. Но ничто не мешает нам вместо постоянной добавить к тригонометрическому

[2] Здесь глубокое родство анализа с квантовой механикой — но развивать в узком контексте столь обширную тему было бы неуместно.

ряду любую функцию, принимающую одинаковые значения на концах промежутка [–π, π], или даже расходящуюся в этих точках — но «одинаковым» образом. Такая добавка ничем не хуже константы может играть роль «нулевого» члена ряда, а в каких-то случаях такой выбор предпочтительнее, поскольку он может подчеркнуть «физику» дела, характер движения, его иерархичность. Понятно, что говорить о единообразии формул для коэффициентов ряда и для «нулевого» члена уже никак не приходится.

В общем случае, мы можем представить произвольную функцию (уже не обязательно периодическую) в виде суммы «периодической» и «непериодической» компонент: первая получается суммированием ряда Фурье — вторая играет роль фона для осцилляций. Понятно, что в «непериодической части» можно также усмотреть «периодические» компоненты — но с очень большим (по шкале ранее выявленной периодичности) периодом, так что на каждом периоде более высокого уровня все «локальные» колебания успевают много раз усредниться в нуль. Так возникает иерархическая структура колебательных движений — и сводить ее к чему-то плоскому допустимо лишь в особом (практическом) контексте. Ясно также, что любую такую иерархию можно свернуть — и развернуть в нечто подобное, но с другим набором уровней. Это, опять же, определяется не математикой, а ее приложениями. Наконец, можно рассматривать ансамбли возможных иерархических структур как виртуально сосуществующие; внимание при этом переносится с деталей внутреннего движения на его глобальное строение, на черты иерархии как таковой, в единстве всех ее частных структур.

Возвращаясь к метафоре круга и прямой, мы вспоминаем о том, в каждой точке круга движение направлено по прямой — но физики знают, что такие «виртуальные» смещения лежат в другом (касательном) пространстве, и безоговорочно путать координаты с импульсами нельзя. Точно так же, можно «спрямлять» круг, представляя его суммой малых отрезков прямой, — но такое представление приемлемо лишь там, где различие практически несущественно; формально указание такого масштаба (уровня рассмотрения) называется предельным переходом. В любом случае, снятие противоположности есть вполне реальная операция; стоит об этом забыть — и логические проблемы неизбежны.

Кстати о симметрии. По-честному, $\sin(0 \cdot x)$ вовсе не тождественно равняется нулю, и говорить об отсутствии в разложении членов с b_0 возможно лишь в ограниченных областях. При уходе на бесконечность мы получаем неопределенность вида $\sin(0 \times \infty)$, и далеко не факт, что при ее раскрытии получится ноль. Когда студентам говорят, что тригонометрический ряд определен в интервале (–π, π), — это жульничество, ибо синус и косинус формально определены на всей числовой оси, и сумма ряда должна существовать всюду. Другое дело, что при отсутствии «нулевых» компонент сумма неизбежно окажется периодической функцией — и придать ей хоть какую-то непериодичность (хотя бы простой сдвиг) возможно только путем явного введения непериодических членов в разложение. Иначе говоря, периодичность есть принципиально локальное явление (поскольку мы сопоставляем состояния одного и того же объекта, два момента времени); в неограниченных областях она может превратиться во что угодно. Чисто практически, всякий программист знает, что синус и косинус реально вычислимы только при относительно небольших значениях аргумента; приведение их к стандартному интервалу для больших аргументов связано с заметной потерей точности.

Для того, чтобы отказаться от постоянного члена в тригонометрических рядах есть и более глубокие основания. Дело в том, что нуль — не совсем число. И даже совсем не число. Это обозначение перехода к пределу, указание на порог применимости. Включать нуль в состав натуральных (или вещественных) чисел есть, для разумного человека, насилие над логикой.

В любой математической (и не только математической) теории нулем обозначают отсутствие объекта — то есть, по сути, выход за границы предметной области. Формально применять теорию вне области ее применимости — это не всегда полезно. Бесконечность —

другое обозначение того же самого, когда мы рассматриваем предметную область теории целиком как особый объект, отличный от любого объекта из предметной области (более высокий уровень иерархии). Обратно, нули появляются там, где мы говорим о нижележащих уровнях, взятых как целое. В силу обращаемости иерархий, различие «верха» и «низа» относительно, и потому в формальных моделях нуль так легко превращается в бесконечность, и наоборот.

В осмысленной (логически последовательной) теории натуральный ряд начинается с единицы — это первое натуральное число (указание на присутствие чего-то, что можно считать). Ноль натуральным числом не является, это лишь сокращенная запись *непринадлежности* классу натуральных чисел. Соответственно, суммировать тригонометрические ряды мы имеем права только с тех членов, где реально появляются тригонометрические функции; в противном случае это уже не тригонометрический ряд, а нечто эклектическое. Точно так же, и в степенных рядах нулевой член — ссылка на внешние условия, другие уровни иерархии — выход за рамки предмета. Рассматривая что-то «в нулевом приближении», мы фактически не приступаем к рассмотрению, а пытаемся очертить границы рабочей области, чтобы потом уже предметно обсуждать вопрос в первом приближении и уточнять детали в высших порядках.

О сходимости тригонометрических рядов доказывают всяческие умные «теоремы». Так, например, утверждается, что если функция непрерывна на $[-\pi, \pi]$ и экстремумов у нее не более чем конечное число, ряд Фурье для этой функции сходится всюду; внутри интервала $(-\pi, \pi)$ сумма ряда в каждой точке совпадает со значением функции, а на концах отрезка мы получим одинаковые значения

$$\frac{1}{2}\left[f(-\pi) + f(\pi) \right]$$

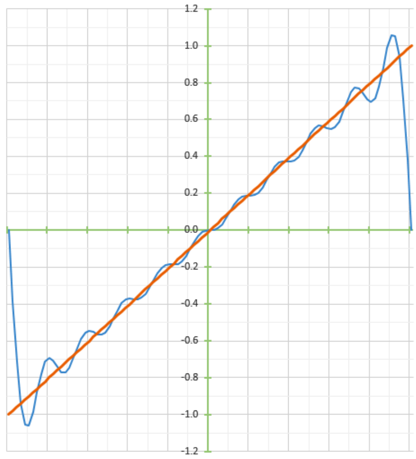
Типичный школьный пример — линейная функция $f(x) = x$, Фурье-разложение которой, для удобства приведенное к интервалу $(-1, 1)$, имеет вид

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin \pi k x$$

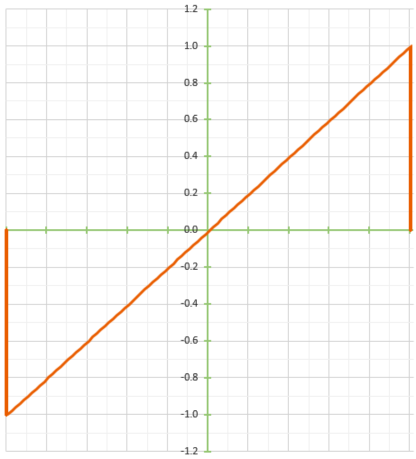
Если формально подставить $x = \pm 1$, обнаруживаем (с прибавлением: «очевидно»), что каждый член ряда тождественно равен нулю, а потому, дескать и сумма ряда будет нулем, так что наше правило относительно концов отрезка, вроде бы, блестяще подтверждается… На самом же деле, в рассуждения вкралась элементарная логическая ошибка — студентам за такое снижают балл на экзаменах. Действительно, равенство членов ряда нулю имеет место только при конечных k, а в пределе мы имеем уже знакомую неопределенность вида $\sin(\infty \times 0)$, которую надо честно раскрывать и выяснять, куда все в итоге приползет. А убывание каждого члена обратно пропорционально индексу тупо компенсируется увеличением количества членов — и здесь сжульничать тоже не получится.

Речь идет, конечно, не о единичном прегрешении против логики — тут глубочайшая логическая проблема. Условно можно было бы назвать это принципом подстановки. Математики сплошь и рядом предполагают, что в любой формуле возможно заменить любой терм на что-нибудь другое — и ничего не изменится. Как мы видим, это не так. Нельзя оценивать значение бесконечной суммы, подставляя какие-либо значения параметров (аргументов) в каждом из ее слагаемых по отдельности. Такой прием срабатывает лишь при определенных условиях. В реальной жизни результат подстановки часто зависит от способа реализации — например, от порядка подстановки и метода получения частичных сумм. Если формула задана рекурсивно, говорить о единовременной подстановке термов вообще невозможно — такая операция может иметь смысл только на одном уровне рекурсии. Но эта проблематика — для особого разговора.

Так чему же равны пределы на концах отрезка? Вопрос на засыпку. Можно, конечно, отказаться от сильных утверждений и заявить, что предела $x \to \pm 1$ не существует, и следует ограничиться только внутренними точками интервала. В крайнем случае, прикрутить односторонние пределы. Но это скучно. Давайте пристальнее посмотрим на график частичной суммы ряда:



Тут уже в буквальном смысле очевидно, что каждая частичная сумма представлена гладкой кривой, и что нет ни малейшего основания ожидать появления разрывов при суммировании ряда целиком. Всякому нематематику ясно, что «топологически» график суммы ряда сходится к ломаной линии:



Да, это неоднозначная функция от x, и значениям $x = \pm 1$ отвечает континуум значений ординаты. Но кто таки нам мешает слегка повернуть оси, чтобы добиться полной однозначности? Геометрические формы не зависят от способа арифметизации. Кривая (траектория) остается все тем же геометрическим местом точек, как ее ни параметризуй: меняются представления объектов, но не сами объекты. Обратное тоже верно: одни и те же числовые структуры представляются разными объектами (в обыденной жизни — далекими от всякой математики). Всякое представление условно, частично, справедливо лишь в каком-то приближении (в контексте). Но какое-то представление всегда возможно и практически необходимо.

Кстати, трюк с малым смещением осей не нов: например, в теории функций комплексного переменного мы давно и привычно обходим таким способом полюса. Так чего нам стесняться в теории рядов Фурье?

Важно здесь, что ряд Фурье для всякой «приличной» функции $f(x)$ сходится всегда к некоторой непрерывной (разумеется, периодической) функции $F(x)$, которая, вообще говоря, не обязана совпадать с $f(x)$. Чтобы устранить формальную неоднозначность можно попытаться перейти к параметрической записи функции — например, выбрав в качестве аргумента длину дуги:

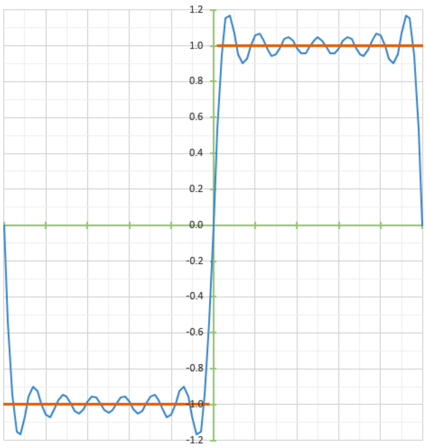
$$x = x(s)$$
$$y = y(s)$$

Никаких разрывов при суммировании ряда Фурье в таком представлении, вроде бы, вообще не возникает, и «заполнение» кажущихся скачков получается само собой. Однако избавиться от проблем не удается: при увеличении числа членов ряда сумма сильно осциллирует (хотя и с убывающим размахом) — так что с предельным переходом опять не все просто; если исходно проблемы возникали только на концах отрезка, теперь неопределенность типа $\infty \times 0$ надо раскрывать в каждой внутренней точке.[3] Для отделения тренда от вариаций существует стандартный трюк: мы «сглаживаем» кривую, убирая слишком быстрые осцилляции:

$$F_N(x) \to \tilde{F}_N(x) = \frac{1}{2\Delta x} \int\limits_{x-\Delta x}^{x+\Delta x} w(s-x) F_N(s) ds$$

Колебания с периодами много меньшими Δx благополучно усредняются в ноль, и мы имеем дело с «хорошей», гладкой линией. С увеличением числа членов ряда усредненная функция стремится к тому же пределу $F(x)$ — без всяких неопределенностей. Иногда, впрочем, именно отклонения от среднего представляют главный интерес. Один из практически важных примеров — теория музыки.[4]

Совершенно аналогично обстоит дело с теоремой Дирихле. Например, из графика для частичной суммы ряда Фурье функции $\mathrm{sgn}(x)$



мы снова усматриваем сходимость к ломаной линии, так что разрыв исходной функции заполняется при полном суммировании ряда вертикальным отрезком оси ординат, и вместо единичной разрывной ступеньки получается непрерывный меандр. И это правильно, поскольку всякая сумма периодических функций с соизмеримыми периодами есть функция периодическая, чего мы и ждем, интуитивно противопоставляя прямую и круг, качественно разные формы движения. Графики периодических функций — просто развертка круга (или многих кругов) вдоль прямой.

Несмотря на формальную сходимость тригонометрического ряда внутри ограниченного интервала, нельзя утверждать, что сходится он именно к той функции, по которой вычислены его коэффициенты. Тонкое строение иерархии (снимающее детали поведения частичных сумм) никуда не денется; и вычислять исходную функцию путем суммирования соответствующего ряда Фурье далеко не всегда целесообразно. И дело тут вовсе не в медленной сходимости, и не в особенностях поведения на краях. Любая наука говорит о чем-то вне нас (хотя бы мы в этом и участвовали как материальные обстоятельства и условия), и строение науки должно отвечать

[3] Нечто в этом роде когда-то привело к появлению квантовой механики.

[4] L. Adveev and P. Ivanov, “A Mathematical Model of Scale Perception”, *Journal of Moscow Physical Society*, v. 3, pp. 331–353 (1993)

строению предмета. Там, где сама деятельность диктует применение Фурье-анализа, мы обязаны его использовать, как бы ни хотелось нам упростить себе жизнь выделением основных трендов, глобальных характеристик — вместо вроде бы малосущественных вариаций. Например, если прямая или ступенька получается в результате работы радиоэлектронных устройств, волновая природа процесса так или иначе проявится на практике — и тригонометрические ряды здесь в порядке вещей. Когда же мы говорим, допустим, о технологическом процессе, выгорании водорода в звезде или обычном киносеансе — естественнее линейное приближение (хотя бы и учетом возможных рефлексивных цепочек). Противоположности не существуют друг без друга, и наше дело — всему искать свое место.

Сухой остаток: понятие предела (в том числе предела ряда или интеграла) не так тривиально, как может показаться из школьного курса математического анализа. Сходится не число к числу — а объект к объекту (числа — частный случай). Функция может быть арифметизована («вычислена») очень по-разному — ни одна из таких частных арифметизаций не выражает идею функции как таковой. Наши примеры «топологической» (или «экстенсиональной») сходимости никоим образом не исчерпывают всех возможностей. Они лишь подчеркивают отличие операционального определения функции от ее экстенсионала («графика»). Но есть сколько угодно других форм определения (например, неявные, схематические, иллюстративные, прикладные), не сводящихся ни к операциям, ни к множествам. Иерархия всех возможных определенностей и есть функция в собственном смысле слова.

Понятно, что пересмотр понятия предела повлечет за собой соответствующие поправки в теорию дифференциала и интеграла. Особых потрясений для математики, разумеется, ожидать не приходится — но пробежаться по замшелости свежим взглядом иногда полезно.

Чисто практически, идея графического предела оказывается полезна там, где традиционная теория констатирует отсутствие предела и призывает доопределить нечто произвольным образом. А никакого произвола на самом деле нет, и кажущееся отсутствие сходимости связано лишь с неудачной параметризацией. Можно выдвинуть неформальный тезис, что все известные «экзотические» функции суть примеры неправильной (неестественной) арифметизации. При более осмысленном выборе описания, экзотика благополучно снимется, и все опять вернется к сочетанию простейших движений: прямой и круга — поступательности и рефлексии.

О числовых системах

Как бы ни пытались приверженцы «чистой» науки отделить математику от жизни, любые математические решения осмысленны только в контексте наших практических нужд. Иногда математика оказывается полезной лишь в качестве предварительного упражнения, наподобие детской игры; без такой «настройки» на деятельность тоже не обойтись. Большинство же математических результатов оказываются долговечными лишь поскольку породившие их формы деятельности сохраняются на каком-то из уровней культуры.

В качестве иллюстрации — несколько широко известных фактов из жизни чисел.

Мы настолько привыкли к этим вездесущим существам, что уже и не задумываемся, что они такое и откуда берутся. Как будто существовали они в природе до земного человечества — и останутся после него. Да, числа выражают нечто объективное, существенное в вещах, что никуда не денется, есть человек и нет. Но сами они — лишь один из способов выражения, субъективные оценки объективных количественных соотношений. Это продукт человеческой деятельности — и различия в характере деятельности приводят к разным идеям числа.

Как и во всякой науке, математические формы относятся либо к наблюдаемым свойствам вещей, либо порождаются внутренним движением науки (теоретически), либо устанавливают границы возможных приложений (типовая постановка эксперимента). В частности, число может возникать при сопоставлении разных деятельностей; это особая деятельность, которую мы называем *измерением*: одна деятельность становится мерой другой. Измерение не может дать что угодно: с одной стороны, результат определяется свойствами измеряемого, с другой — нам нужен практический результат, а не процесс измерения сам по себе; поэтому точность измерения всегда находится в пределах разумной достаточности. Другими словами, к сложности мира мы подходим со своим масштабом, используем исторически сложившиеся шкалы. Если какая-то шкала нас не устраивает — мы строим другую, но прежние оценки никуда не исчезают, они остаются в новых результатах как уровни приближения (альтернативные картины мира). Нет смысла придерживаться «точных» значений там, где хватает чего-то попроще. Более того, разные шкалы могут быть просто несовместимы. Например, в Европе исторически выделяют четыре времени года — а в некоторых районах Азии и Африки год делится на пять (неодинаковых) частей; и то, и другое относится к определенным аспектам объективной реальности — но было бы странно судить о европейском климате по африканским меркам, или наоборот.[5]

Типичный процесс измерения иерархичен: сначала мы должны составить представление о возможных порядках величин; потом явления раскладываются по полочкам общего характера; при необходимости вводятся дополнительные подразделения (уточнения). Абстракция этого процесса — особый математический продукт, который мы называем системой счисления.

В общем случае, система счисления есть некоторая иерархия шкал, так что любое число (из некоторого практически важного диапазона) возможно представить набором позиций на разных уровнях иерархии. Обратно: каждому такому набору можно сопоставить реальные деятельности и процесс измерения, в результате которых мы получим именно это число.

Вообще говоря, разнообразие возможных представлений ничем не ограничено. Каждое из них настроено на определенную области практики. Далее, одно и то же число допускает сколько угодно разных представлений — поскольку получить его можно в разных ситуациях. Вопрос об эквивалентности разных представлений перестает быть любимой игрушкой математиков и становится сугубо практическим вопросом: там, где разные действия входят в одну деятельность, их результаты реально соизмеримы. Если такой общей деятельности нет — бессмысленно задавать какие-либо отношения. В частности, формальное конструирование может обслуживать деятельность по сознательной организации производства — в этом контексте математические результаты приобретают нормативный характер: мы уже не приспосабливаем наше поведение к реальности, а требуем, чтобы реальность соответствовала нашим ожиданиям, — и активно вмешиваемся в устройство мира, чтобы удерживать окружающую среду в заданных параметрах.

Позиционные системы счисления на данный момент считаются наиболее универсальными, а все остальное, вроде бы, представляет лишь исторический интерес. Насколько это так — время покажет. Уже сейчас намечаются некоторые подвижки в понимании позиционности, и от дальнейших обобщений никто не застрахован. В традиционном исполнении, система счисления с основанием K задает некоторую базовую шкалу, представляющую собой конечный набор натуральных чисел $\{1, \ldots, K-1\}$, так что (положительный) результат измерения оказывается одним из чисел этого набора («ближайшим» по величине, в данном контексте, по отношению к текущей деятельности). Если же найти представителя в этом диапазоне не удается, мы переходим на другой уровень иерархии: для представления чисел, больших $K-1$, последовательно вводятся шкалы вида $\{K^p, \ldots, (K-1)\cdot K^p\}$ с любыми натуральными p, а для чисел, меньших единицы, шкалы вида $\{K^{-q}, \ldots, (K-1)\cdot K^{-q}\}$, с натуральными q. Когда подходящая грубая шкала найдена, мы представляем результат ближайшим элементом шкалы (*первая значащая цифра*), а соответствующее число p или $-q$ называется *порядком величины* (или *позицией* записи — отсюда термин «позиционная система»). Во многих случаях знания порядков величин достаточно для принятия решений. Если нет — исследуем разность результата измерения и полученной грубой оценки. При наличии соответствующей процедуры измерения, мы можем получить оценку этой разности по порядку величины — следующую значащую цифру. В итоге всякое (измеримое) число представляется набором пар $\{k, p\}$ или $\{k, -q\}$, где k есть первая значащая цифра в

[5] Разумеется, глобальные изменения климата вполне могут привести к иным представлениям о временах года как в Европе, так и в Африке.

соответствующем порядке. Вообще говоря, результат измерения не обязан быть представлен во всех порядках — каждое число развертывается в свою, индивидуальную иерархическую структуру, со своим набором непустых позиций. Условно ее можно представить формулой

$$k+\sum_{\nu=1}^{N} k_{\nu}^{+} K^{p_{\nu}}+\sum_{\lambda=1}^{\Lambda} k_{\lambda}^{-} K^{-q_{\lambda}}\ , \qquad (*)$$

где любая из трех компонент может отсутствовать. Для удобства, отсутствующие элементы обозначают особым символом — нулем. Важно иметь в виду, что нуль — это *не число*, а всего лишь обозначение пустой (вакантной) позиции. Вроде пустых клеточек в поле для суммы на квитанциях к оплате. Однако математики традиционно причисляют нуль к числам — и потом сами удивляются возникающим из-за этой логической неряшливости странностям. Но уж очень хочется формально включить нуль в состав допустимых цифр и записать любое число в простом и компактном виде:

$$\sum_{\mu=M_{\min}}^{M_{\max}} k_{\mu} K^{\mu}\ , \qquad (**)$$

предполагая, что суммирование идет по всем $M_{\min} \le m \le M_{\max}$, но в некоторых позициях стоят нули. Удобство записи — великая вещь; многие выводы в хорошей нотации самоочевидны. И тем не менее, следует помнить, что всякая нотация вырабатывается для определенного класса деятельностей и ограничивает мысль соответствующими рамками; возможны ситуации, когда такие ограничения препятствуют развитию науки, стереотипы мешают творчеству.

Ясно, что представимые в позиционной системе величины всегда рациональны; какие бы числа ни получали мы в результате измерения, записать их можно лишь с некоторой конечной точностью. Когда математик предлагает нам вообразить себе бесконечную последовательность цифр, магические слова «и так далее» — пустой звук, пока мы не укажем, как именно следует порождать новые члены бесконечной последовательности. Бесконечность за гранью математики, это просто неоконченная деятельность, отсутствие результата. По отношению к нашей иерархии шкал, нуль и бесконечность — это просто указание на выход за пределы шкалы данного уровня, соответственно, снизу или сверху (если, из практических соображений, мы полагаем возможным ограничиться линейно упорядоченными шкалами).

Вообще говоря, величины разных уровней несопоставимы — и просто так складывать их нельзя. Суммы в (*) или (**) — техническая условность, способ указания на иерархичность деятельности. Понимать такие выражения буквально — все равно что складывать велосипед с орбитальной станцией: да, в каких-то случаях рубль можно привести к доллару — но это особая деятельность, а в ней свои накладные расходы… Однако в математике пока не принято заботиться о формальных приличиях, и в этой супердемократической науке мы вполне можем вычислять уровень благосостояния народа как полусумму жалких грошей в кармане бедняка и капиталов на банковских счетах мультимиллиардера — что с успехом использует буржуазная пропаганда.

Тем не менее, следуя традиции, мы на какое-то время разрешим сплющивать иерархию в нечто плоское — и объявим любые числа сравнимыми, отвлекаясь от способа их получения. Осмысленные абстракции никому не вредят. Проблемы начинаются там, где эскизы с натуры начинают выдавать за природу, где вместо разума — грубый произвол.

Следующий шаг на пути формализации — переход к пределу. Мы не можем сосчитать бесконечность и выписать все вообще значащие цифры, переходя ко все более мелким (или укрупненным) масштабам. Но в некоторых практически важных случаях оказывается, что разные иерархические структуры представляют один и тот же вполне реальный объект; в контексте позиционных систем счисления мы говорим о разной точности представления — но есть и менее тривиальные возможности.

Понятно, что всякое единство подразумевает некоторую деятельность, в рамках которой мы это единство и устанавливаем. Традиционно, математики сопоставляют «записи» чисел в одной и той же позиционной системе и говорят, что два числа (иерархические структуры) различаются меньше, чем на K^M, если у них совпадают все цифры при $\mu \geq M$. Если M отрицательно, речь идет о соответствующих отрезках дробной части, и «точное» значение определяют как предел при $M \to -\infty$. Нетрудно догадаться, что точно так же возможно говорить и о совпадающих последовательностях для $\mu \leq M$, и неограниченное возрастание ничем, по существу, не отличается от приближения к нулю.[6] С точки зрения иерархического подхода, мы говорим, что любые последовательности цифр, совпадающие между уровнями $M_{\min}$ и $M_{\max}$, представляют *в этих пределах* одно и то же число. В других пределах могут проявиться различия; всякая эквивалентность поэтому относительна, и следует всегда указывать, в рамках какой иерархической структуры мы ее обнаруживаем, — но в современной математике область применимости обычно лишь подразумевается, и возникает соблазн объявить частный результат всеобщим законом, истиной в последней инстанции, для всех и на все времена.

На практике существование предела означает возможность некоторой деятельности, в результате которой мы создает вполне определенный продукт. Количественное сравнение продуктов разных деятельностей — особая деятельность, и если по каким-то причинам не удается выразить одно через другое, это не просто формальная иррациональность, а выражение объективных отношений между реальными вещами. Объекты, сопоставимые в деятельности (продукты одной и той же деятельности), должны быть и математически сопоставимы, при правильном выборе системы счисления. Другими словами, они представимы в одной и той же иерархии шкал. Например, дробь 1/3 в десятичной записи содержит бесконечное количество знаков; в троичной системе она явным образом рациональна — но дробь 1/10 в троичной системе конечным образом не представима. Соизмеримость величин обнаруживается при переходе к системе счисления с основанием 30, в которой обе дроби представлены конечной записью. Заметим, что так понимаемая соизмеримость зависит от реальной возможности построения соответствующих шкал. Если оказывается, что шкала с основанием 30 недоступна (запрещена «правилами отбора»), никакая математика не позволит в полной мере сопоставить троичные и десятичные числа на практике. Подобные ситуации хорошо известны музыкантам, где разные звуковысотные шкалы (музыкальные строи, звукоряды, лады, тональности) далеко не всегда совместимы в рамках одной композиции.[7]

В этом контексте, несоизмеримость рациональных и иррациональных чисел означает лишь, что некоторые числа (характеризующие продукт некоторой деятельности) не представимы конечным образом ни при каком *натуральном* основании K. Ну и что? В XX веке хорошо изучены многочисленные обобщения позиционных систем счисления — в частности, с любыми вещественными основаниями K, и с вещественными числами в качестве «цифр».[8] Иерархия шкал предполагает не только (и не столько) клоны одной и той же шкалы, это набор «естественных» (для данной предметной области) единиц измерения (вообще говоря, своих на каждом уровне), с соответствующими наборами совместных шкал (правилами отбора). В физике, например, мы стараемся использовать системы единиц, при которых из уравнений движения исчезают все размерные множители. Нечто подобное возможно и в математике: корректное построение числовых шкал (системы счисления) должно воспроизводить иерархию соответствующей предметной области (организацию деятельности). Если мы можем практически конечным образом получить продукт — его математическая модель также будет конечной, при правильном выборе шкалы. Никаких «переходов к пределу» тут не потребуется.

[6] Формально, можно, например, сопоставить любому целому числу некоторую дробь, заменяя положительные степени в позиционной записи такими же отрицательными. Всякое число тогда представляется парой дробей, и легко определить («нестандартную») арифметику на множестве таких пар так, чтобы сохранить обычные свойства вещественных чисел. Два числа называются K-сопряженными (дуальными), если целая часть одного соответствует дробной части другого и наоборот: например, в десятичной записи, числа 3.14 и 41.3 сопряжены. K-сопряжение — частный случай *обращения* иерархий; за каждой такой операцией — различия в способах практической деятельности.

[7] Л. В. Авдеев, Ю. И. Варивода, В. М. Дубовик, П. Б. Иванов, *Рождение звукоряда*. — М., 2009.

[8] См., напр., G. E. Edgar, *Measure, Topology and Fractal Geometry*. — Springer-Verlag N.Y., 1992.

Несоизмеримость в математике — выражение объективной несопоставимости деятельностей. Например, цилиндрическая емкость («стакан») с диаметром основания 1 и высотой 4 имеет объем π; если у нас есть емкость в форме параллелепипеда («пакет») с габаритами $1\times1\times3$, ее объем равен 3, и мы никак не можем при помощи одной из этих емкостей отмерить такое же количество жидкости, как при помощи другой. Но кто нам мешает иметь под рукой обе емкости — и при случае пользоваться стаканами или пакетами в зависимости от производственной необходимости? Объем тогда выражается не в одномерной шкале, а двумя числами: количество стаканов + количество пакетов (причем знак суммы здесь отвечает совершенно реальной операции смешивания содержимого в некоторой емкости достаточно большого размера). Это вполне аналогично тому, как в квантовой механике вектор состояния двухуровневой системы представляется линейной комбинацией «чистых» состояний, а наблюдаемые величины включают вклады обеих компонент. Приведение многомерных шкал к единому основанию возможно лишь с некоторой степенью точности; удовлетворительность такого представления определяется практическими соображениями. Когда существует реальная процедура порождения все более точных представлений такого рода, мы говорим о переходе к пределу. Но не факт, что все вообще в мире представимо числами — и что предел числовой последовательности обязательно будет числом.

Для иллюстрации, возьмем в качестве основания системы счисления комплексное число $Z = K\exp(i\varphi)$, где $|K| > 1$. Тогда Z^{-m} формально стремится к нулю при $m \to +\infty$, и, вроде бы, можно строить сколь угодно точные дроби. Однако фазовый множитель $\exp(-im\varphi)$ сильно осциллирует с ростом m, и (в пределе) нулевому значению амплитуды отвечает континуум возможных («виртуальных») фаз — а вовсе не число. При разных способах перехода к пределу мы получим разные фазовые распределения.

До сих пор мы обсуждали только структурные аспекты систем счисления (статика). Но здесь имеется еще и собственно системный, динамический аспект: в общем случае, система есть способ порождения одних структур другими — данным на входе соответствует некоторый выход. С одной стороны, для всякого числа мы должны уметь построить его представление в данной позиционной системе; с другой — по некоторому представлению мы умеем так выстроить деятельность, чтобы получить соответствующее число. Чтобы избавить себя от подобных рутинных операций, человек изобретает всевозможные автоматы и препоручает им работу с плодами прошлого творчества. Разумеется, роботу все равно, что конкретно сдвигается в мире после его трудов. Оценивает результаты человек. Как минимум, он должен определиться с уровнем деятельности и в зависимости от этого решить, получен хоть какой-нибудь результат или еще нет — а потом уже заниматься сравнением реально имеющихся результатов. Вокруг этой непростой задачи выросла необъятная теория вычислений (включая квантовые): сначала мы робко приглядываемся к выработанным на практике приемам счета — потом усматриваем общий принцип и начинаем его догматически насаждать в качестве априорного критерия правильности.

В теории обобщенных систем счисления (с вещественным основанием и вещественными цифрами) доказывают теорему о том, что при любом выборе основания и цифр представление вещественных чисел окажется либо неоднозначным (некоторым числам соответствуют как минимум две последовательности цифр), либо неполным (существуют непредставимые в данной системе числа). Это живо напоминает знаменитую теорему Геделя в логике полноты и непротиворечивости. Сходство не случайно — оно еще раз напоминает о происхождении математики из человеческой деятельности, хотя бы и втиснутой в узкие рамки типовых шаблонов, официальных предписаний или обывательских стереотипов.

Итак, у нас есть автомат, которому мы можем скормить (неформально полученное) число и (при достаточном терпении) дождаться определенного результата — представления числа в виде последовательности цифр некоторой обобщенной системы счисления. Традиционно цифры выбирают из некоторого конечного множества; их можно упорядочить и перенумеровать — так что в итоге мы опять приходим к представлению шкалы натуральными числами от 1 до $K-1$

(однако здесь K уже не играет роль основания системы счисления). Следующий шаг — добавить в систему конечные последовательности цифр (всевозможные конечные отрезки K-ичной записи, для единообразия включая нули в некоторых позициях). Все такие комбинации также можно перенумеровать — и представить натуральными числами, начиная с $K+1$. Такие новые «цифры» ничем не хуже старых — и количество цифр (возможных состояний нашего автомата) становится (счетно-)бесконечным. Польза от такого расширения — в единообразном представлении соизмеримых величин: нам больше нет нужды искать общие шкалы, ибо всякое рациональное (в данной системе) число представляется конечной последовательностью цифр. На системном языке: автомат вычисляет позиционное представление числа за конечное число шагов. Последняя полученная «цифра» предполагается «в периоде»: после остановки автомата она уже не меняется и воспроизводится во все последующие моменты времени (во всех последующих позициях). В частности, эта последняя цифра может оказаться нулем — и тогда разложение оказывается конечным в традиционном смысле.

Вопрос об иррациональности числа сводится, таким образом, к вопросу: остановится машина на каком-то шаге или нет? Минимальное знакомство с теориями вычислительной сложности подсказывает: формального решения у этой задачи нет. Зато есть иерархия уровней сложности, отношения между которыми не всегда понятны и не всегда хорошо определены. Дело осложняется еще и тем, что само понятие «остановки» тоже формально неопределимо. Действительно, допустим машина не выдает новых цифр в течение какого-то времени. Где гарантия, что мы не попали на достаточно длинный отрезок записи с одинаковыми цифрами — после которого когда-нибудь пойдут и другие? Получили мы результат — или надо еще подождать? Сколько? — минуту? год? вечность? Ответ в практике: если на протяжении данной деятельности нечто остается неизменным — мы считаем это константой, аксиомой или нормативным предписанием (законом). Именно так подходят к своим теориям физики (из тех, что еще не свихнулись на почве «точности» и «строгости» и не уверовали в априорность математических «истин»). Если кусок подынтегрального выражения практически постоянен в пределах интегрирования — мы смело выносим его за знак интеграла, — в крайнем случае, заменяя на некоторое «усредненное» значение. Нам важно принять оперативное решение — и двинуться дальше, а не сидеть и тупо пялиться на тупую машину. Если решение окажется неправильным — жизнь поправит. Лучше делать ошибки, чем не делать вообще ничего.

Наши грубые и несовершенные представления о системах счисления также подлежат развитию в самых неожиданных направлениях. Прежде всего, условным оказывается выбор основания. Почему, собственно, шкалы всех уровней должны быть устроены одинаково? По жизни, например, мы используем «смешанную» шкалу всякий раз, когда смотрим на часы. Может оказаться, что способы измерения с разной точностью весьма различны, — тогда их естественно соотносить с разными математическими объектами.

Далее, всякая иерархия неисчерпаема — и между любыми уровнями может возникнуть нечто промежуточное. Для построения системы счисления вовсе не обязательно развертывать иерархию последовательно, дискретным образом. Вместо суммы (**) мы тогда получаем аналог интеграла Лебега:

$$\sum k_\mu K^\mu \to \int k(\mu) K(\mu) d\mu \to \int K(\mu) dk(\mu),$$

где каждому уровню разбиения $K(\mu)$ («позиции» в записи) отвечает некая мера dk, играющая в данном случае роль цифры в соответствующей позиции.

Еще одно обобщение — переход от степенных рядов к разложениям общего вида. Например, давайте использовать в качестве иерархии шкал какой-нибудь набор ортогональных функций; в частности, можно понимать позиционную запись как ряд Фурье. Сюда же примыкает разного рода экзотика: экспоненциальные и факториальные разложения, биномиальная система, разложение по числам Фибоначчи и т. д. Трудно сказать, насколько это практично, однако в качестве математической игры — почему бы и нет? Забавно понаблюдать, как одна и та же позиционная запись (последовательность «цифр») порождает разные числа в разных системах счисления. В каких-то случаях такие забавы могут выйти за рамки игры: скажем, «спектральное» представление чисел предполагает определенную последовательность «энергетических» уровней, так что позиционная запись дает нечто вроде «внутренней энергии».

Наконец, привязка представления чисел к деятельности неминуемо приводит нас к существованию культурно обусловленных иерархий шкал — к устранению произвола. И здесь опять вспоминается история формирования звуковысотных систем в музыке: возможны не любые звукоряды, а только достаточно устойчивые и регулярные; каждый звукоряд представляет собой дискретный набор непрерывных зон и допускает несколько уровней вложения одних зонных структур в другие. Возможные («допустимые») музыкальные решения зависят от устройства звукоряда, и в каждом строе музыка звучит по-своему. Эта модель иллюстрирует существенные черты всякой деятельности, а значит, и в математике следует ожидать ухода от абстрактных (произвольных) конструкций к естественным структурам; ясно, что традиционные математические абстракции никуда не денутся, они по-своему полезны, — но содержательная наука постарается обойтись без голых нулей и дурной бесконечности.

Восприятие форм

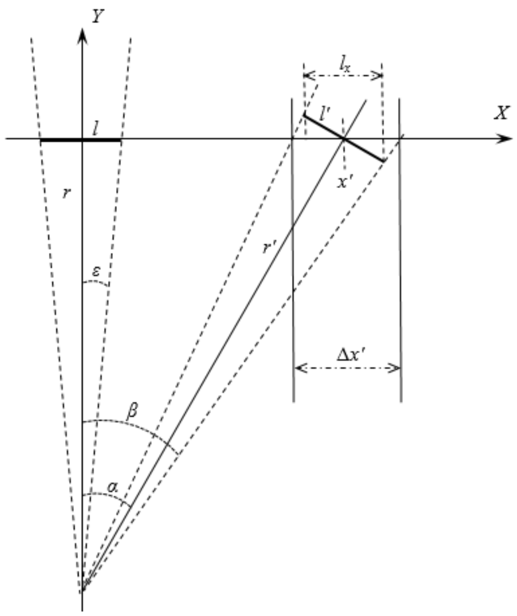
Математическое пространство, абстрактно равнодушное к тому, что в нем происходит, — это великое достижение человеческого ума, показатель нашего умения выйти за рамки собственной ограниченности и замахнуться на постижение мира целиком — а заодно и определиться со своим местом в этой грандиозности. Однако на практике приходится вести себя в соответствии с тем, где мы оказались, и учитывать собственные возможности, чтобы претендовать на что угодно только в пределах разумного — иначе какие же мы разумные существа, если не замечаем никаких пределов? И тут оказывается, что математическое пространство — далеко не лучшая модель окружающей (и включающей) нас действительности, и надо основательно подкрутить математику, чтобы ее результаты имели хоть какой-нибудь смысл. Способы такой подгонки под реальность со временем становятся повседневной рутиной, абстрактной формальностью, — и превращаются в еще одну математическую теорию, которая тут же перестает нас удовлетворять и требует неформального расширения. Это нормально: жизнь не стоит на месте, и наука развивается вместе с ней.

Принципиальное отличие воспринимаемого мира от формально-математического состоит в том, что никто и никогда не дает нам пространства сразу и целиком — его надо строить по образу и подобию текущей деятельности. Разумеется, мы никогда не начинаем с нуля: есть старые заготовки, и можно попытаться усмотреть в новой деятельности нечто сродни ранее пройденному, и скомпоновать предварительный образ из уже известных форм. Такая первичная, метафорическая модель потом обрастет необходимыми поправками и превратиться в рабочий инструмент; потом придумают, как эту эклектику вывести из единой идеи — и добавить в общую копилку еще одну универсальную технологию.

В качестве иллюстрации, возьмем самое обыкновенное житейское пространство: испокон веков в нем обнаруживают три измерения, которые для математики совершенно одинаковы — тогда как люди не только находят их качественно различными, но и дают им разные названия, причем по-разному в разных ситуациях: «длина — ширина — высота», «длина — ширина — глубина», «ширина — высота — глубина», «расстояние — азимут — склонение» и т. д. Когда речь заходит о размещении одного в другом — возникают сразу два ряда пространственных мер: габариты и расположение (что также маркировано различием названий). Восприятие человека не пассивно, оно представляет внешний мир в терминах деятельности. Чтобы посмотреть на что-то правее или левее, надо повернуться в нужном направлении на нужный угол; чтобы охватить высоту — требуется изменить наклон тела, подняться или опуститься; для оценки расстояний до предметов используются совсем другие инструменты (причем различные, в зависимости от степени удаления); глубину мы иногда вообще увидеть не можем, и судим о ней по косвенным признакам (точно так же, как мы делаем правдоподобные выводы о пространстве за горизонтом восприятия).

Формальная модель воспринимаемого пространства неизбежно отличается от модели пространства «самого по себе». Предположим, что некий предмет расположен на расстоянии r от наблюдателя; в этой фразе уже заложена весьма сильная абстракция, поскольку, вообще говоря, разные части предмета расположены от нас на разных расстояниях, — следовательно, приходится одновременно воспринимать предмет как целое, что можно характеризовать общей (интегральной) удаленностью, — и как нечто пространственно организованное, детали чего мы имеем возможность разглядывать (хотя бы для того, чтобы составить целостное впечатление, «опознать» предмет). Деятельность восприятия развертывается в серию отдельных актов, каждый из которых представляет нам какую-то часть целого — то, что попадает в «фокус» на этой стадии. Разумеется, фокус восприятия — не точка, это область конечных размеров; иногда эти размеры вмещают предмет целиком, и он воспринимается как «точечный», — но чаще всего для восприятия целого приходится смещать фокус в пределах общего «поля зрения», в поисках края (или каких-то иных границ). В результате предмет оказывается представлен структурой процесса разглядывания. На практике дело крайне редко ограничивается одиночной цепочкой «фиксаций»: за время восприятия мы успеваем многократно пробежаться разными путями и в какой-то мере освободиться от произвола, выявить в предмете нечто относительно устойчивое.

Для наглядности, ограничимся пока только двумя измерениями: в качестве предмета будет выступать сегмент прямой, минимальное расстояние до которой от наблюдателя равно r, и центр отрезка совпадает с подножием перпендикуляра, вдоль которого и отмерено это расстояние. Тогда разглядывание сводится к повороту вправо или влево от центра в плоскости прямой и точки наблюдения. Каждый раз, при каждой фиксации, в фокусе внимания оказываются точки с небольшим отклонением луча зрения от линии взгляда (допустим, на углы, не превышающие некоторого ε); все такие точки выглядят для наблюдателя как отрезок длины l, изображающий часть прямой длины $\Delta x = l$. В предположениях линейной оптики, это можно графически изобразить так:



Разумеется, за существование конечного угла обзора, наряду с оптикой глаза, отвечает еще и бинокулярное зрение; оно же участвует в оценке расстояния до объекта. Но физиология не имеет отношения к делу: восприятие — это деятельность, явление более высокого уровня, а ее телесная организация может быть различной (вплоть до устранения всякой органики вообще).

При повороте луча зрения на угол α фокус смещается в точку x', и становится доступна часть наблюдаемого сегмента размером $\Delta x'$, которая видится наблюдателю как отрезок длины l', расположенный перпендикулярно лучу зрения на расстоянии r'. Поскольку речь идет о точках прямой, мы не можем поворачиваться на слишком большие углы, и $\beta = \alpha + \varepsilon < \pi / 2$. Легко видеть, что $l = 2r\,\mathrm{tg}\,\varepsilon$, $x' = r\,\mathrm{tg}\,\alpha$, $r' = r / \cos\alpha$, $l' = 2r'\,\mathrm{tg}\,\varepsilon = l / \cos\alpha$. Таким образом, при больших отклонениях α, за один взгляд мы можем охватить очень большую часть прямой:

$$\Delta x' = r\left[\mathrm{tg}\,\beta - \mathrm{tg}(\beta - 2\varepsilon)\right] = \frac{r\sin 2\varepsilon}{\cos\beta\cos(\beta - 2\varepsilon)} = \frac{2r\sin\varepsilon\cos\varepsilon}{\cos\beta\cos(\beta - 2\varepsilon)} = \frac{l\cos^2\varepsilon}{\cos(\alpha+\varepsilon)\cos(\alpha-\varepsilon)},$$

и при $\beta \to \pi / 2$

$$\Delta x' = \frac{r\sin 2\varepsilon}{\cos\beta\left[\cos\beta\cos 2\varepsilon + \sin\beta\sin 2\varepsilon\right]} \sim \frac{r}{\cos\beta} \to \infty$$

Тем не менее, проекция l' на ось X при любом направлении взгляда постоянна: $l_x = l'\cos\alpha = l$; это показывает, как теряются тонкие детали картины на большом расстоянии от ее центра: любая дискретная структура поглощается фокусом наблюдения, и возникает полное впечатление непрерывности.

В пределах фокуса внимания, различие расстояний точек прямой X от наблюдателя считается несущественным — все они принадлежат одному уровню иерархии. Именно поэтому мы можем моделировать фокус восприятия отрезком, перпендикулярным лучу зрения. Однако альтернативная модель, представляющая фокус восприятия не отрезком, а небольшой дугой, не вносит существенных поправок в размер области непосредственного охвата: коррекция

$$\Delta l = 2r(\mathrm{tg}\,\varepsilon - \varepsilon) \sim \tfrac{2}{3} r\varepsilon^3$$

при малых ε имеет более высокий порядок малости (то есть, принадлежит другому уровню детализации). Вопрос о том, что первично: прямая или дуга, поступательное движение или вращение, — представляет интерес в связи, например, с основаниями физики; но здесь мы говорим о другом.

Вообще говоря, можно фокусироваться на любой точке наблюдаемого объекта. Восприятие в целом тогда представляется континуумом фрагментов разной длины. Но для полного описания достаточно конечного числа наблюдений (актов восприятия) — если их зоны непосредственного охвата полностью покрывают пространство объекта. При этом в каждом покрытии возникает иерархическая структура, по удаленности от наблюдателя. Ясно, что таких покрытий может быть сколько угодно, — но все они представляют одно и то же; это целое, способное развертываться в разные (но отнюдь не произвольные!) иерархические структуры, мы называем *иерархией*. Восприятие как деятельность — иерархично.

Таким образом, даже очень простая математическая модель приводит к идее иерархически устроенного «внутреннего» пространства, которое субъект (наблюдатель) использует для организации всякой иной деятельности. Более реалистические модели могли бы учесть тонкую структуру акта восприятия (общая психология учит нас, что всякое действие развертывается в иерархию операций) и представить фокусировку внимания, например, как распределение по углам (например, гауссоиду), а не просто угловой диапазон. В этом случае перекрытие зон непосредственного охвата моделируется некоторым внутренним «тембром», в котором роль основного тона играет угол 2ε. Такая базовая структура позволяет поставить вопрос об устойчивости и регулярности внутренних «тембров»: не всякие из них годятся на роль качественно определенной шкалы. В музыке, как известно, теория предсказывает наличие небольшого числа предпочтительных шкал (звукорядов, строев); лишь две из них оказываются универсальными, способными представить любые музыкальные интонации.[9] Аналогичная структура эмпирически обнаружена и в изобразительных искусствах — однако в то время найти причины этого соответствия так и не удалось.[10]

---

[9] L. Adveev and P. Ivanov, “A Mathematical Model of Scale Perception”, *Journal of Moscow Physical Society,* v. 3, pp. 331–353 (1993)

[10] P. Ivanov, “A Hierarchical Theory of Aesthetic Perception: Scales in the Visual Arts”, *Leonardo Music Journal,* v. 5, pp. 49-55 (1995)

Вообще говоря, для адекватного восприятия вовсе не требуется полностью покрывать объект зонами непосредственного охвата — достаточно нескольких опорных направлений. Уяснить это себе можно и без большой науки: каждый по опыту знает, что любые вещи мы оцениваем по нескольким характерным чертам — а все остальное «интерполируем». Такова, например, традиционная технология построения графиков функций: поиск особенностей, несколько промежуточных точек — и соединить все гладкой кривой по лекалу (или сплайном). Разумеется, качество изображения зависит от того, насколько верно мы угадали характер функции; так же оно и в жизни: бывают ошибки, но практика все поставит на места.

Один из важнейших выводов зонной модели восприятия — внутренняя иерархичность каждой шкалы, наличие «вложенных» дискретных подструктур. В простейшей модели мы можем произвольно менять расстояние до объекта — и получать разные иерархии восприятия (наборы карт разного масштаба). На самом же деле и здесь вместо сплошной линии существуют дискретные наборы предпочтительных точек обзора; какими они будут — определяется характером шкалы.

Говоря выше о переходе к пределу «скользящего взгляда», $\beta \to \pi / 2$, мы, конечно же, вышли за пределы применимости модели. В реальности максимальные углы обзора (поле зрения) определяются характером деятельности и никогда не бывают слишком велики. Если оказывается, что для покрытия поля зрения требуется слишком много зон непосредственного восприятия, это сигнал: пора переходить на другой уровень иерархии. То есть, мы как бы оказываемся *внутри* предмета — и он эффективно распадается на более обозримые объекты, к которым применима обычная технология деятельного восприятия. Противоположный предел, когда предмет целиком укладывается в одну зону, приводит нас в абстракции к понятию точки. Это тоже сигнал: в жизни не бывает точек, и если все сливается в одно — неплохо бы присмотреться поближе.

Математика зонного восприятия представляет дело так, будто существует некое единое (объемлющее) пространство, и можно выстраивать формальную теорию по отношению к нему. Теперь давайте вывернем логику наизнанку: что если иерархичность пространства и есть его истинное устройство, а наши абстрактные построения возникают лишь на одном уровне иерархии, в пределах определенной деятельности? На первый взгляд, это кажется возвратом к первобытному антропоцентризму (с которым наука тысячи лет боролась, а кое-где борется до сих пор). Если форма предмета зависит от способа разглядывания — не значит ли это, что в теорию подспудно протаскивают внепредметную субъективность, мистику и произвол? Но что, собственно здесь от субъекта? Только строение системы, иерархическая структура. Любые природные вещи взаимодействуют на разных уровнях, и то, как выглядит одна вещь для другой, зависит от характера взаимодействия, которое не обязано быть сознательной деятельностью: годится и физика, и метаболизм. Если вместо человека предмет будет разглядывать робот — он увидит примерно то же самое, поскольку применяется такая же технологическая иерархия. Электрон для электрона тоже окажется иерархией — если он взят не одномоментно, а как процесс постепенного развертывания. Физики-теоретики, например, часто используют плавное «включение» взаимодействия — но лишь как вспомогательное средство, технический трюк, а в конечном итоге от параметров «включения» стараются избавиться. Но тем самым избавляются и от физичности теории, ее осмысленности, применимости к определенному классу объектов. Такие абстрактные теории, якобы, применимы к чему угодно; отсюда формальные и логические противоречия. Возьмите теорию относительности: с одной стороны, мы ограничиваем скорость распространения любых взаимодействий — а с другой, предполагаем уже готовое пространство-время; как-то криво получается! Если быть последовательными, надо рассмотреть процесс формирования системы отсчета, и не делать никаких предположений о том, что находится у горизонта (см. выше о пределе скользящего взгляда), а тем более за ним. В такой теории не будет эффектных сингулярностей, под которые так удобно выбивать финансирование. Но это будет наука о природе, а не об абстракции, которую мы за природу выдаем. Иерархический подход, таким образом, решительно преодолевает антропоцентрические предрассудки, тогда как формалистическая (беспредметная) наука скатывается в ничем не ограниченный субъективизм. С точки зрения зонной теории, существование объемлющего пространства связано с фиксацией определенной шкалы — одного из уровней восприятия. Для каждой шкалы объективно дана иерархия вложенных шкал; при переходе к другой шкале изменится и эта иерархия, и тот же предмет будет выглядеть совершенно иначе. Пока мы ограничиваемся только одним уровнем, неизбежны «иллюзии» и «артефакты» — но и они не случайны, связаны с устройством шкалы, и потому вполне реальны в рамках соответствующей деятельности. Логически, это не дает нам права отождествлять подобные «инерциальные силы» с реальными, «физическими» явлениями; но в каждой деятельности мы обязаны учитывать и свое место во Вселенной: мы ведем себя в соответствии с нашим видением мира.

Последний вопрос: какое отношение все это имеет к математике?

Самое прямое. Попытки математиков противопоставить себя остальному человечеству, встать над природой и навязывать миру свои «абсолютные» истины, — из той же серии, что и стремление некоторых физиков говорить о Вселенной вообще, а не о той ее части, с которой мы реально имеем дело. Выбрав для себя один из возможных способов восприятия, мы забываем о других возможностях, о разнообразии мира, о возможности трактовать то же самое различными, и не всегда совместимыми способами. В пределах своей области применимости (для предметов в поле зрения) такая «кастрированная» наука вполне эффективна и очень полезна; однако она становится помехой, когда пора поработать над чем-то еще. Разумеется, жизнь так просто не убить, и она пролезает в математику через тысячи умолчаний и неформальных допущений, которые «строгая» наука не обязана обнажать при публике. Потом кто-нибудь вводит в оборот новую парадигму, с позиций которой прежние теории предстают в совершенно ином свете, «естественно» объединяются в нечто удивительно красивое. Все хлопают в ладоши и говорят: гениально! А, ведь, этот гений не сделал ничего особенного: он лишь вспомнил то, о чем все остальные когда-то предпочли забыть.

Множества: элементарно

Про элементы и множества большинство наслышано со школьной скамьи — а некоторые еще раньше. Пока по жизни еще требуется какая-то наука, мысли о множествах становятся естественным фоном для прочих изысканий — чем-то предшествующим всякой формализации, ее непременным условием. Что-то кому-то принадлежит — а у кого-то нет ничего… Такова наша повседневность. Вот и называем то, что имеет хозяина — элементом, а самого этого хозяина — множеством. Бывает и так, что хозяин одного принадлежит другому. Приходится разбираться: тех, кто по должности имущий, — в один класс; тех, кому судьбой назначено принадлежать, — в другой. То есть, помимо множеств, есть еще и классы, которые очень на множества похожи — но не совсем.

То, как мы работаем с множествами и их элементами, — не с потолка взято, а копирует тысячелетиями закрепленные общественные порядки. В теории множеств математика — лишь иная формулировка (буржуазной) социологии, с ее основным вопросом: свой или чужой? Отношение к другому напрямую зависит от его классовой (сословной, расовой, этнической, гражданской, корпоративной, клановой, тусовочной) принадлежности. Поэтому нам важно четко определиться с главным: принадлежит элемент множеству или нет; а внутреннее строение множества — это уже следующий вопрос. Ясно, что есть в жизни и то, что не вписывается в теоретико-множественные рамки; но коль скоро мы провозгласили примат черно-белой логики, неудобные вопросы можно задвинуть в дальний угол, откуда их время от времени вытаскивают прикладные науки, наряжают в математические платьица и восклицают: как мило! — а на практике быстро переходят от формальностей к чему-то не столь приличному.

С точки зрения множества — все его элементы на одно лицо. Они, конечно, разные (иначе как бы мы говорили о множестве?) — но в каком-то высшем смысле все едино. Впрочем, сами элементы с высшим смыслом далеко не всегда согласны: им есть что делить — и одним достается больше, чем другим. То есть, при всей качественной однородности, имеются существенные количественные различия. Закон, вроде бы, для всех один — но очень большие массы во взаимоотношениях со всякой мелюзгой могут им спокойно пренебречь (хотя с другими массивными приходится быть осторожнее). Как бы то ни было вопрос о различии одинаковых есть, и разбираться с ним каждому поколению придется по-своему.

Математик поступает просто: каждому элементу множества можно формально приписать число — его «общественный» вес, уровень существенности для целого. Если, например, у нас есть множество из двух элементов {*слон, банан*}, мы задаемся вопросом: а сколько слонов и бананов у нас таки есть? — и если оказывается, что бананов на порядок больше, чем слонов, мы называем это множеством бананов с примесью слонов, а если наоборот — множеством слонов с примесью бананов. В точном соответствии с тем, как приписывание каждому человеку веса по размеру капитала приводит к выводу, что этот мир — для богатых, а бедные в нем — лишь досадное недоразумение, источник мелких неприятностей… В идеале бедных надо бы вообще загнать в какую-нибудь резервацию — выделить в отдельное множество. Пытались не раз — не получается; и в математике это нашло свое специфическое выражение.

Да, конечно, не составляет труда формально представить сообщество слонов с бананами (так сказать, «смешанное» состояние) как объединение двух «чистых» («одноэлементных») множеств:

$$\{\textit{слон, банан}\} = \{\textit{слон}\} \cup \{\textit{банан}\}.$$

Но что это нам дает? На первый взгляд ничего. Однако если вспомнить, что принадлежность множеству — не божественное откровение, а нечто, поддающееся практической проверке, мы видим очень даже существенное различие правой и левой части этого (мета)равенства: слева предполагается, что есть *единая* процедура определения принадлежности, не зависящая от качества каждого элемента; переходя к объединению, мы допускаем, что есть две *разные* процедуры: слоновость устанавливается иначе, чем банановость; наконец, приравнивая одно другому мы делаем очень сильное утверждение о том, что некая деятельность всегда приводит к тому же результату, что другая, на исходную не обязательно похожая. И тут возникает бездна вопросов: как понимать «результат», «тот же самый», «всегда»? Разные ответы — разные теории.

Может запросто оказаться, что различие слонов и бананов существует лишь внутри множества {*слон, банан*}, — а сами по себе слон и банан вообще неопределимы. В классовом обществе — это сплошь и рядом: какой рабовладелец без рабов? какой капиталист без наемного труда? В математике на этот случай есть типовой прием: вместо множества {*слон, банан*} мы говорим о кортеже ⟨*слон, банан*⟩ — который потом пытаются жульнически отождествить с упорядоченным множеством, а это чревато последствиями: то есть, помимо множественности есть, оказывается, еще и порядочность — а в итоге сущности начинают плодиться совершенно хаотически, и всякой разумности конец.

Математик с негодованием отвергнет подозрения. Разве не очевидно, что упорядочить множество из двух элементов можно очень просто? — надо лишь указать, какой из элементов считается первым! Тогда кортеж ⟨*слон, банан*⟩ есть просто другая (сокращенная) запись для множества {*слон*, {*слон, банан*}}.

Нет, не очевидно. Что мы понимаем под «указанием»? Вариантов миллион. В частности, можно считать первым элемент с наибольшим весом, и выстраивать порядок от «солидных» элементов к не очень весомым. А жульничество состоит в том, что множество {*слон, банан*} — это именно множество, и напрямую ничьим элементом стать не может. По-честному, следовало бы говорить о множестве {*слон*, X}, где X в каком-то смысле равно множеству {*слон, банан*}. Тут уже и дураку ясно, что смыслов разных много, и «теоретико-множественное» определение кортежа сильно зависит от способа сведения сложных сущностей (множеств) к простым (элементам).

Даже для одноэлементных множеств, элемент *слон* — вовсе не то же самое, что множество {*слон*}. То, что можно усматривать в множествах, не всегда уместно по отношению к элементам, и наоборот. Например, мы говорим о мощности множества: мощность элемента в классической теории есть нонсенс, тогда как мощность одноэлементного множества (по определению) равна единице. Элементы могут принадлежать множествам; множества, в лучшем случае, могут быть лишь подмножествами (и здесь свои подводные камни).

По жизни, мы можем запросто рассматривать одно и то в разных аспектах — в зависимости от того, что мы собираемся с этим делать. Книгу можно читать — а можно подпереть ею что-нибудь; иногда книги используют на растопку; иногда разжигают ими вражду — или, наоборот, делают символом единства… Точно так же, одно и то же не возбраняется трактовать то как множество, то как элемент, — но это *разные* трактовки! Путать одно с другим в рамках одного рассуждения — это логическая ошибка. Ясно, что мы опять упираемся в тот же вопрос: что есть «одно и то же»? Никакая формальная теория ответа не даст — это сугубо практическая задача. Легко видеть, что при любом понимании единого «элементарность» или «множественность» становятся его разными сторонами, аспектами, разными способами употребления. Иногда такие частные проявления почти не зависят друг от друга (например, можно быть хорошим танцором и плохим семьянином); на практике чаще бывает, что противоположности взаимосвязаны — вплоть до полного неприятия друг друга, так что определяя одно, мы полностью определяем и другое. Взятое как элемент — не множество; взятое как множество — не элемент.

Можно ли представить себе нечто, являющееся вместе и тем, и другим? Можно. Однако для этого придется выйти за рамки классической теории множеств и рассматривать какие-то суперпозиции «чистых» состояний, или аналог квантовомеханической матрицы плотности. Такая математика по-своему интересна — но это другая наука.

А пока вернемся к множествам, элементы которых, помимо качественной определенности, имеют еще и собственное количество — веса. Может показаться, что это всего лишь обобщение классических множеств, для которых веса всегда равны единице. Ну, будем мы считать, что какие-то элементы существуют в нескольких экземплярах… Чтобы исчерпать множество, мы периодически запускаем лапу внутрь — и вытаскиваем что-нибудь: пусть будет выборка с повторениями. Нам это хорошо знакомо и по математической статистике, и по работе с компьютерами (объекты типа *bag* и разные итераторы). Ничего нового.

Ан нет! Множества с повторениями — совсем не то же самое, что «взвешенные» множества. В первом случае речь идет о классах эквивалентности; во втором — о степени присутствия каждого элемента, нерасчленимой на единичности. Выборка первого типа даст полное количество объектов всех сортов (вместе с количеством по каждому сорту); выборка второго типа дает каждый элемент только раз — но с каким-то весом (в определенной модификации). Так различаются классическая и квантовая статистика.

Вроде бы, и это не новость. Уже придумали теорию нечетких множеств — которая, впрочем, пока не теория, а благое пожелание, шаблон для конкретных реализаций в зависимости от методов работы с функциями принадлежности. Действительно, идея здоровая: элемент принадлежит множеству не на все сто, а только частично, и надо различать объем множества (количество элементов) и его массу (сумму весов). В принципе, веса могут быть любыми вещественными числами — всегда можно нормировать их на общую массу и свести к диапазону (0, 1); но можно и не сводить, а нормировать на количество элементов, переходя тем самым от количеств к плотностям, что очень удобно для бесконечных множеств. Богатство возможностей для приложений только в плюс.

Чего в этом компоте не хватает? Не хватает собственно науки. Если мы научились нажимать на кнопки компьютера и тыкать пальцами в экран телефона — это не делает нас специалистами по информационным технологиям, или хотя бы продвинутыми пользователями. Обезьяньи методы работы с множествами ни на йоту не проясняют сути дела: мы не знаем, почему именно так, и в каких случаях следует поступать иначе. А жить плесенью на вулкане — как-то не по-людски. На то и разум, чтобы вместе с наукой росло знание о ее границах.

Математики склонны верить, что формальные конструкции существуют сами по себе, что они даны человечеству свыше, а все сущее лишь представляет всеобщие идеи случайным и неполным образом. Отсюда путаница в современной терминологии: моделями в математике называют частные реализации абстрактных схем, — тогда как на самом деле все обстоит как раз наоборот: математические теории — очень бледное, однобокое, приблизительное отражение каких-то сторон человеческой деятельности, и требуется очень многое к математике добавлять, чтобы формально-математические скелеты реальных вещей стали содержательными.

Формальное знание чаще всего лишь завуалированная форма признания в собственном невежестве. Дескать, мы ничего не понимаем — но надуваем щеки и делаем умный вид. Если кто поинтересуется: чего ради? — ответ всегда готов: а у нас обычай такой! Другими словами: коли не нравится — идите куда подальше… С одной стороны, сам факт сознательного выбора способа деятельности — это уже хорошо. Но когда начинают все на свете подгонять под привычные шаблоны — хорошего мало. Поскольку мир такой подгонке активно сопротивляется, выбор превращается в самоизоляцию, отвержение всего, что не вписывается: то, чем мы привыкли заниматься, — это наука; а кто хочет иначе — тому не место в академическом сообществе. С должными организационными выводами и финансовыми последствиями.

Наука начинается со стремления всему дать название, заменить работу с вещами работой с их абстрактными представителями, терминами и формулами. Важно, чтобы наука на этом не остановилась. Например, в медицине многие болезни названы по тому органу, который в каком-то смысле работает неправильно: гастрит, бронхит, пародонтит, синусит и т д; что там конкретно не в порядке — следующий вопрос, за которым, в свою очередь, следует вопрос о причинах. Математика — это, прежде всего, универсальная технология придумывания имен. Поиск сути — потом, другими методами.

От того, что мы как-то что-то назовем, знания не прибавится. Называние — важная подготовительная ступень познания, своего рода декларация о намерениях: мы заметили какую-то особенность в окружающем мире — и начинаем присматриваться и досконально разбираться. Если мы знаем, как обращаться с множествами — прекрасно; давайте теперь соображать, а что, собственно, мы делаем.

В общефилософском плане, у всякой деятельности есть объект и продукт — а субъект нужен, чтобы преобразовать одно в другое. В рамках каждой конкретной деятельности, природа нам поначалу представляется хаосом вещей и явлений — объектов. Их этой мешанины нам предстоит выбрать то, что может пригодиться для продвижения к намеченной цели. Всякое блюдо требует каких-то ингредиентов; мы идем за ними в окружающую среду — и проставляем галочки напротив тех запросов, которые уже удовлетворены. Когда все пункты отмечены — можно приступать к работе: у нас есть тот объект, из которого мы производим наш продукт. Этот объект в математике называется множеством.

Отсюда уже многое следует. Для того, чтобы нечто могло стать элементом множества, оно должно обладать вполне определенным (в данном контексте) свойствами — удовлетворять производственную потребность. Когда прораб звонит на стройку и спрашивает бригадира: у вас гвозди есть? — требуется не формальный ответ (да, завалялось несколько штук), а оценка достаточности запаса для определенной работы. Иначе говоря, принадлежность элемента множеству означает конец некоторой работы (комплектование) и предполагает переход к другой (выработка продукции).

Далее, поскольку список ингредиентов определен продуктом деятельности, а не условиями ее протекания, конструировать множества мы можем очень по-разному. В простейшем случае, у нас есть нечто вроде набора мерок, которые предстоит наполнить предметным содержанием (одно яйцо, двести граммов муки, сто граммов сахара, щепотка соли, разрыхлитель на кончике ножа, четверть стакана сливок). Если чего-то нет под рукой — можно приспособить не совсем такое, но в том же духе, соответственно изменив исходные пропорции. Каждый продукт, следовательно, определяет, вообще говоря, не единственное множество, а некоторый универсум, строение которого мы можем формально изучать. То есть, вместо одной теории множеств на всех нам нужны особенные теории множеств для разных формальных моделей (математических продуктов). Степень похожести таких множеств друг на друга никак не связана с их собственным устройством — она идет извне, от подобия соответствующих деятельностей.

Философия указывает, что деятельность (поскольку она разумна) не может быть чистой случайностью, чем-то однократным и неповторимым; деятельность — это культурное явление, регулярное воспроизводство некоторого продукта и необходимых для этого общественных условий. А значит, подготовка производства и собственно производственный процесс не обязательно следуют строго одно за другим и могут быть относительно независимы: мы понемногу собираем все необходимое, а когда набирается достаточно — расходуем запас; остатки переходят на следующий цикл производства. Вот вам и математическая абстракция «взвешенного» множества: «склад», набор ячеек для исходных материалов плюс степень наполнения каждой ячейки. А тут, опять же, самые разные возможности. Если контейнеры достаточно вместительные, а ингредиенты не очень друг с другом взаимодействуют, — можно хранить их сколько угодно в одной ячейке; но бывает и так, что в одну ячейку помещается только один элемент — либо ни одного. Так «бозонные» множества отличаются от «фермионных» (именно последними занимается классическая теория множеств). Плюс всяческие комбинированные варианты.

Важное замечание на полях: количественные различия элементов связаны с циклами воспроизводства — они в статической теории представляют время. В математике всегда присутствуют эти две стороны: качественная определенность (пространственность) и счет (последовательность, порядок — абстракция времени). Мы можем сколько угодно выражать одно через другое — это не устраняет противоположности, а лишь прячет ее, переносит ее куда-то еще. Единство пространства и времени возможно лишь в особой деятельности, которую здесь можно условно назвать измерением.

Так наш скромный производственный склад неожиданно вырастает в целое пространство: каждому элементу множества отвечает некоторое пространственное измерение, а веса элементов превращаются в пространственные размеры по соответствующим осям. В этой картине обычные, классические множества представляются разного рода гиперкубами; какие-то нетривиальные конструкции могут быть связаны с областями произвольной формы. В качестве альтернативы, классические множества представляются точками такого пространства; здесь выход на другие обобщения — и в частности, открывается возможность изучать динамику преобразования одних множеств в другие — разумеется, в рамках некоторой деятельности, по отношению к ее продукту.

Но и это еще не все. Классические обобщения классических множеств подразумевают вполне определенный способ проверки принадлежности элемента: если мы что-то положили в ящик — оно там и лежит, пока не дойдет дело до инвентаризации… Другими словами: элементы множества хорошо изолированы друг от друга, они никак не взаимодействуют меж собой. Но на практике так бывает далеко не всегда. Вещи портятся, превращаются в другие, перемещаются в процессе хранения, соединяются и разъединяются. Мы закладываем в печь тесто — а вынимаем хлеб; сажаем семечко — а получаем нечто плодоносящее. Наконец, процедура выдачи со склада (выборка) иногда предполагает разного рода преобразования: если в банке у нас есть счета в рублях, долларах и евро, — мы вполне можем получить часть вклада в швейцарских франках. Так рождаются квантовые множества.

То есть, единая числовая оценка принадлежности элемента множеству расщепляется на две половинки — точно так же, как в квантовой механике от вероятностей переходят к «амплитудам». В дираковской нотации, возможные поступления элементов связаны с векторами некоторого пространства $\left|\alpha\right\rangle$, а возможные результаты выборки — с функционалами $\left\langle\mu\right|$, так что вероятность получить «функцию принадлежности» μ для множества в состоянии α связана с амплитудой перехода $\left\langle\mu\middle|\alpha\right\rangle$. Еще нагляднее тесная связь множеств с деятельностью в так называемом представлении вторичного квантования, когда добавление элемента a сводится к действию оператора рождения a^+, а выборка — к действию оператора уничтожения a^-. Как и в квантовой механике, операторы, вообще говоря, некоммутативны, и структура множества зависит от способа его конструирования. Когда в математике лихо отождествляют полученные разными способами объекты (2 = 1+1 = 3–1 = 12/6), здесь неявно предполагается существование некоторой деятельности, в рамках которой такие продукты равноценны: это не формальный произвол, а сугубо практический вопрос. Нет такой практической подоплеки (пусть даже в форме детской забавы или абстрактного любопытства) — и нет вообще никакой науки: в лучшем случае, искусство манипуляции (символами, или общественным мнением).

Итак, множество с точки зрения образующей деятельности есть просто набор ярлыков, этикеток, которые мы навешиваем на что угодно, хотя бы отдаленно имеющее отношение к делу. В психологии такая категоризация, отнесение явлений к заранее заданным группам, называется восприятием — и его отличие от ощущения как раз в этой активной сортировке всего и вся. Ощущение — это образ предмета как он есть; и мы так устроены, чтобы такое отражение было возможно. Ощущения могут быть недостаточными — но они нас не обманывают. Восприятие — это образ предмета как мы его себе представляем; отсюда возможность иллюзий и заблуждений. Историческое развитие в этом плане представляет собой выработку разных наборов представлений, заточенных каждый под свою задачу. В идеале, в любой деятельности мы должны пользоваться такими шкалами, строение которых наиболее полно воспроизводит строение деятельности; часто приходится ограничиваться приблизительным соответствием — но какой-то выбор неизбежен, он позволяет деятельности выделить из окружающего мира ее объект. Такие предпочтительные перцептивные шкалы в психологии называют установками, а в математике — множествами. По-английски это вообще одно и то же слово (*set*).

В этом контексте понятно, что формальные конструкции вроде «пустого множества» или «множества всех множеств» множествами быть никак не могут: они принадлежат другим уровням деятельности, в другой предметной области. Наши представления культурно обусловлены — и потому возможны не какие-угодно установки, а те, что уже сформировались на практике. Каждая предметная область в культуре связана с определенными типами деятельности. Соответственно, предметная область соотносится с идеей пустого множества, а иерархия возможных шкал задает некоторый универсум, по отношению к которому множества ведут себя как элементы; при это множество как элемент универсума — не то же самое, что множество как набор элементов, и логически неправильно было бы смешивать эти уровни в одном рассуждении.

Может показаться, что идея множества более фундаментальна, чем идея «взвешенного» множества: при формальном рассмотрении кажется, что мы лишь «накладываем» на множество дополнительные характеристики, приписываем элементам веса (или степени заполнения). Но столь же формально можно полагать, что, наоборот, множество — частный случай «взвешенного» множества: просто веса элементов для множества равны единице, и все дополнительные возможности редуцируются; обычное множество получается из «взвешенного» операцией типа проекции. Реально и то, и другое — разные уровни деятельности, а во всякой иерархии порядок уровней может быть разным, в зависимости от способа развертывания. Разумеется, в каких-то случаях допустимо представлять себе дело так, будто есть готовый набор ящичков, которые можно каким-то образом наполнять и опустошать. Но на практике это далеко не всегда так, и структура «склада» вырастает в процессе изменения его предметной базы, приспосабливается к потребностям. Взять хотя бы разные типы грузовых судов: танкеры, сухогрузы, контейнеровозы и т. д.; точно так же, появление виртуальных платежных средств существенно видоизменяет рынок валют. Мы вправе использовать любые абстракции — если помнить, что у каждой ограниченная область применимости. Родство абстрактных понятий не в том, что одно из них фундаментальнее другого, а в том, что все они происходят из чего-то другого, что не вписывается целиком ни в одну абстракцию.

В пространственной картине, объединению множеств соответствует рост размерности пространства; пересечение множеств выделяет подпространство. Но с предметной точки зрения речь идет о родственных деятельностях: в обоих случаях мы интересуемся общей для них предметной базой. Искать общность можно по-разному: либо вширь, собирая вместе все, что когда-либо для чего-либо сгодилось, — либо вглубь, выявляя то, что годится сразу для многих вещей. Одно без другого не ходит: надо набрать много разного, чтобы усмотреть сходство — однако усмотреть различие мы можем только на основе предполагаемого единства. Формальная наука регулярно впадает в соблазн абстрактной универсальности: так хочется найти простейшие кирпичики мироздания — и уж больше ничего не искать, блаженно почивать на лаврах… Жизнь неоднократно наказывала человечество за такую самоуспокоенность — но до сих пор ученые верят в первопричину всего сущего: дескать, раньше мы чего-то не понимали — но уж на этот раз… В сущности, это та же религия, с другим знаком. На деле же все меняется — но не только само по себе (фоновые изменения), а еще и в результате нашей сознательной деятельности, в ходе освоения мира и его активного преобразования. Тем самым мы помещаем себя в несколько иную среду, несущую следы нашего воздействия на природу, — и добавляем еще один уровень опосредования между свойствами вещей и способами их употребления.

Новые технологии предполагают другие множества — будь то конструкционные материалы для летательных аппаратов, кулинарные ингредиенты, или пригодные для застройки территории. По мере изменения климата — меняется состав и продолжительность времен года. Вымирают какие-то из используемых человечеством языков — и возникают новые. Точно так же, единицы измерения физических величин адаптируются к вновь освоенным диапазонам. Было бы странно в математике ограничиться логическим каркасом тысячелетней давности.

Тем не менее, в культуре много того, что сохраняется долго, — если сравнивать с продолжительностью человеческой жизни, или даже исторической эпохи. Пока характер деятельности остается примерно тем же, нет смысла изобретать лишние теории; если же такие нововведения все же происходят — это всегда связано со скрытой общественной потребностью, как предвестие революции; разумеется, старых приемов работы никто не отменяет, и они долго могут сосуществовать с модами нескольких поколений.

Универсальные множества существуют только в сопоставлении с неуниверсальными, которые, в свою очередь, не универсальны лишь в отношении к ранее определенной универсальности. В каком-то другом контексте одно легко превращается в другое. Это называется обращением иерархии.

Один их очевидных претендентов на роль всеобщей основы — язык. На первый взгляд (ограничиваясь чисто когнитивной стороной), это воплощение идеи категоризации: всему свое имя, и словарь — универсум для всего. Словарный запас все время расширяется — но это регулярный процесс, который вполне укладывается в представлении о каком-то суперсловаре, где все есть, — и к которому всякий язык стремится аки последовательность ко пределу своему… Если же еще и алфавит канонизировать — тогда предел становится абсолютом, и возможно, хотя бы в принципе, достичь академической нирваны.

Конечно же, здесь нагромождение иллюзий. Язык меняется не только количественно — само содержание его становится другим. Даже в математике всего за пару-тройку столетий произошли колоссальные сдвиги — и старинные трактаты в современной интерпретации далеко не всегда соответствуют замыслу автора. То же относится и к способам записи, к «алфавиту»: зоопарк математических обозначений не вмещается в уникод, это уже не просто текст, а многомерные диаграммы, привести которые к традиционной дискурсивной схеме удается лишь в каком-то приближении, в частных случаях. Слова «число», «пространство», «функция», «истинность», — и, конечно же, «множество», — каждое поколение математиков переосмысляет по-своему — и увязывает с терминологической молодежью, вроде «алгоритма», «аппликатора», «топоса» или «фрактала».

Взятые в разных пропорциях, элементы множества определяют различные продукты деятельности; однако все это происходит в рамках определенной технологии — и такие наборы исходников порождают сходные (сопоставимые) продукты. Чтобы перейти к существенно другому классу продуктов, требуется изменить объект деятельности; вообще говоря, разные объекты несопоставимы друг с другом, и объединять такие множества мы можем только на основании их участие в какой-то общей деятельности. То есть, какие-то деятельности могут относиться к некоторой деятельности «высокого уровня» (см. выше об относительности такого упорядочения). Иерархия множеств строится по образу и подобию иерархии деятельности. В простейшем случае — нечто вроде дерева; пищевая индустрия распадается на ряд относительно независимых производств: зерновые, молочные продукты, рыба, мясо… С другой стороны, в одном рецепте и мука, и яйца, и капуста, и мясо — при этом хлеб все-таки отличается от супа или шоколадных конфет. Это еще одна иллюстрация подвижности иерархий, каждая из которых может быть развернута в разные иерархические структуры — не теряя определенности. Разумеется, возможны и другие, не «деревянные» отношения между уровнями.

С учетом всего этого, теория множеств (элементарная и не очень) оказывается вписана в культурный контекст, допускающий самые разные направления формализации. Только такая математика в полной мере осмысленна. Никому не возбраняется пробовать, играть с формами; более того, практические приложения вовсе не сводятся к сугубо материальным потребностям: в нас есть еще и жажда красоты, и страсть к систематизации, и мечты о будущем… Все это требует особых инструментов, в том числе формальных. В силу единства человеческой культуры (в котором для нас выражается единство мира) даже самые странные теории не возникают из пустоты — и не совсем бесполезны. Однако чуть больше разумности в отношении к собственным творениям — никогда не повредит.

Рациональность пространств

По сути своей, мир очень прост. Сложным его делают громоздкие частности, стремление разглядеть как можно больше деталей. Все кажется одинаково важным, и не хочется упустить ни крупицы. Вот и блуждаем от одной тени к другой, и так в них запутываемся, что в бытие чего-то кроме теней уже и не верится. Наука вязнет в рассуждениях о себе самой, искусство смакует собственные увлечения, философия тщится уложить мир в одну-единственную схему. Тем более важно в такие моменты уметь остановиться, посмотреть со стороны на мир и на себя в мире. Оказывается, что детализация вовсе не обязательно уточнение, а популярность далеко не всегда вульгарна. Удачный образ может быть полезнее сотни формул, а строгая теория на деле не более чем развернутая метафора. Очень может быть, что несколько очевидных замечаний в расчете на любознательного дилетанта необходимы науке наравне с кропотливыми расчетами и долгими экспериментами. Кому хочется нетривиальности, все дальнейшее могут не читать.

По жизни, мы привыкли двигаться в разных направлениях, делать одновременно кучу дел, находить неожиданные стороны у самых обыкновенных вещей. С другой стороны, справиться с трудным делом часто получается только путем выделения отдельных этапов, промежуточных целей и вспомогательных задач. И в том, и в другом случае появляется возможность кооперации, распределения деятельности между несколькими (а иногда и очень многими) участниками. Когда люди начинают заниматься наукой, они воспроизводят в ее строении все ту же логику: всякое исследование либо учит строить одно из другого — либо позволяет разобрать целое на части, чтобы сложить их впоследствии как-нибудь иначе. Легко видеть, что первично тут стремление к созиданию, а всякие разборки нужны только в интересах развития производства.

Как только заходит речь о соединении различного или внутреннем строении целого, встает вопрос: существуют ли здесь общие подходы — так сказать, типовые технологии? Философия отвечает: да, существуют. Однако не как раз и навсегда заданные шаблоны (технологические карты), а по-разному, в зависимости от того, чем мы конкретно в данный момент занимаемся. Такие фундаментальные принципы воспроизводятся снова и снова, ибо они выражают универсальные черты всякой деятельности, а в конечном счете — единство мира, в котором эта деятельность способна возникать. Называются они философскими категориями. Из категорий, естественно, можно строить категориальные схемы, и развертывать каждую в иерархию схем.

Чуть ли не самая известная категориальная схема — противоположность количества и качества, их взаимопревращение. Вот ее мы и положим здесь в основу математики размерности. Опять же, без лишних сложностей — в самых общих чертах, интуитивно.

Допустим, у нас есть задача: изготовить нечто общественно полезное. Если продукт удовлетворяет некоторую потребность — его качество нас устраивает. Любой другой продукт, удовлетворяющий ту же потребность для нас (в рамках той же деятельности) обладает тем же качеством. В этом смысле все такие продукты одинаковы (взаимозаменяемы). Но когда мы говорим «другой» — мы уже подразумеваем возможность различать качественно одинаковые вещи; это различие одинаковых вещей называется количественным.

Качество и количество в данном случае соотносятся только в контексте деятельности, по отношению к ее продукту. Разумеется, такого рода соотношения возможны и в природе, живой или неживой, безотносительно к человеческим потребностям. Но мы тут собираемся заняться конструированием пространств — а про все остальное надо говорить другими словами.

Легко видеть, что просто различение одинаковых вещей — это еще не количество. Например, чукча знает своих оленей по именам и «в лицо» — и они для него качественно различны, хотя запрячь в нарту он может как одного, так и другого. То есть, качество запросто может стать иерархическим; для человека это связано с объективной взаимозависимостью разных деятельностей. Точно так же, в математике элементы множества никак не соотносятся друг с другом, они просто различны, — но каждый принадлежит тому же множеству. На верхнем уровне иерархии, говоря о множестве, мы не заостряем внимания на том, как именно один элемент отличается от другого; это качество более глубокого уровня.

Чтобы различие стало количественным, нужно, помимо собственно производства и потребления, заняться еще и наведением порядка. Рассортировать, расположить все, что годится для удовлетворения данной потребности, по предпочтительности. В предельном случае, когда одно ничем не лучше другого, такое упорядочение может опираться на внешние обстоятельства деятельности: что-то произведено раньше другого, что-то просто раньше попалось нам на глаза… Перечисление может показаться случайным — но причина по жизни всегда есть. Место в этом перечислении — это и есть количество в собственном смысле слова. Очевидно, количество тоже бывает иерархическим: на каждом уровне пригодности оказывается группа вещей, и дальше надо разбираться с порядком внутри групп; с точки зрения количества верхнего уровня внутренние количественные различия выглядят несущественными поправками — или даже бесконечно малыми. Точно так же, переход от одной степени удаленности от верхнего уровня к следующей может требовать разных усилий — и здесь еще одна количественная иерархия.

В теории размерности такие, соотнесенные друг с другом в контексте общей деятельности, качество и количество представляют пространство и время — и вместе образуют то, что мы называем пространством размерности 1 (одномерным пространством, или пространственным измерением).

Если по-простому: пространство — это возможность двигаться, переходить от одного к другому «естественным образом», в соответствии с имеющимся порядком. Если мы хотим, чтобы наши абстрактные пространства представляли что-то в реальном мире, мы должны позаботиться о правильности (объективности) упорядочения. Пространство и время — это лишь одна из сторон движения, и определены они только по отношению к движениям некоторого вида.

Качества как таковые несопоставимы. Две вещи разного качества — просто различны. Но как только есть порядок — можно сравнивать одно с другим в пределах данного качества. Одно оказывается дальше, другое ближе… Равенство — дело непростое, намек на существование внутренней иерархии.

Ограничимся пока традиционной, «плоской» оцифровкой одномерного пространства: есть некоторое начало отсчета (например, соотносимое с «идеальным» для данного субъекта продуктом деятельности), и каждой точке отвечает вещественное число — время, необходимое для перемещения из начала координат с некоторой «стандартной» скоростью; в физике (следуя древним традициям) в качестве стандарта используют скорость света — именно поэтому («по построению») она оказывается постоянной во всех системах отсчета.

Как легко догадаться, отрицательных количеств в природе не бывает. Всякая иерархия развертывается от вершины вглубь. Сравнение положительных чисел показывает, в каком направлении требуется двигаться, чтобы перейти от одного к другому: это направление мы условно обозначаем знаком + или – . В более сложных (многомерных) случаях направление будет задано фазой, или еще как-нибудь; в общем случае речь идет о траекториях перемещения. В жизни это предполагает выбор одного из возможных способов производства, развертывание деятельности в иерархию действий и операций. Например, если нам нужен склад, мы можем построить его с нуля — а можем перестроить какую-нибудь церквушку.

В зависимости от того, что и как мы упорядочиваем, возникают разные типы пространства-времени. Все определяется характером деятельности, в рамках которой мы строим математику. Дискретность или непрерывность, конечность или бесконечность, безграничность или какие-то ограничения — все это примеры качественно разных количеств. Обратная сторона того же — переход количества в качество. Например, стулья могут быть разных размеров и форм; однако слишком маленький стул — это уже не предмет мебели, а игрушка; точно так же, гигантский стул — произведение монументального искусства, и в быту на таком сидеть никто не будет.

Опять же, в природе нет ни нулей, ни бесконечностей. Все хорошо в какой-то мере; неумеренность зачастую приводит к печальным последствиям. Пока мы всего лишь играем абстракциями, риск невелик: ну, нарвемся на очередной парадокс, вляпаемся в противоречие… Стоит заняться прикладными вопросами — абстракции превращаются в набор инструментов, и область применимости каждого надо выяснять на практике. Во многих случаях внутри каждого качества есть достаточный простор для количественных вариаций вдали от границ, некий рабочий диапазон, оставаясь в котором возможно абстрагироваться от всяких ограничений. Всем привычная идея пространственного измерения как возможности бесконечно двигаться в любом направлении — это как раз такая, локальная структура. Когда-то подобная «протяженность» подразумевалась сама собой. Сегодня все знают про квантовую механику, которая целиком сосредоточена на состоянии границ, а внутренние (локальные) движения допускает лишь виртуально, и то не всегда. По-хорошему, и в этом надо знать меру.

Мы уже видели, что количественные и качественные иерархии можно развертывать по-разному. Когда мы задумываем некую работу, допустимы сколь угодно замысловатые идеи; иногда мы намеренно даем свободу фантазии, нащупываем направления развития. Однако пора приниматься за дело: в какой-то момент мы решаем, что конструкция нас устраивает — и дальнейшее развертывание прекращаем. После этого можно работать с полученной структурой следуя обычаям науки, не задаваясь философскими вопросами. Упремся в чепуху — будем разбираться с основаниями.

Допустим у нас есть два одномерных пространства. Всегда ли возможно склеить их в нечто двумерное? Чисто формально, казалось бы, ничто не мешает рассматривать пару чисел, каждое от своего измерения. Килограмм картошки и три кирпича. Поскольку в деятельности человека все взаимосвязано, практически всегда можно найти (или искусственно создать) ситуацию, где подобное сочетание не покажется противоестественным. Но даже и в этом случае, интуитивно, простого сопоставления для пространственности не достаточно. Два качества могли бы рассматриваться как разные измерения одного пространства лишь при наличии качественной однородности: каждое из них представляет особое качество — но оба они представляют качество более высокого уровня. Другими словами, есть деятельность, предполагающая сочетание двух других деятельностей, каждая из которых необходима для получения конечного продукта. Как именно компоненты деятельности будут объединены — не столь важно. Например, мы можем сначала поставить забор, а потом его покрасить, — но можем привезти уже покрашенные панели, оснащенные приспособлениями для быстрого монтажа; возможны и промежуточные варианты (скажем, с дополнительной прокраской стыков). Тогда продукт составной деятельности логично представить точкой в двумерном пространстве, а процесс производства представлен одной из возможных траекторий от исходного состояния к конечному.

Собственно, так оно и делается в линейной алгебре: есть базисные вектора — а время выстраивает последовательность их линейных комбинаций. При этом оказывается, что построение базиса — в общем-то, дело вкуса, а конечный продукт получается как линейная комбинация при любом выборе осей координат и масштабов. Здесь снова мы сталкиваемся с разными способами развертывания иерархии — ее обращениями. Главное при этом — целостность, качественная определенность продукта. Возможность перестройки в рамках целого, симметрия — это как раз то, что отличает многомерное пространство от простого перечисления («кортежа») разнородных качеств. Это подчеркивает принятая в линейной алгебре нотация: сложение векторов, а не просто покомпонентное сопоставление.

При отсутствии единства компонент возникает математический объект иной природы — взвешенное множество, набор элементов: каждому элементу набора (качеству) сопоставлено число, которое можно интерпретировать как степень выраженности соответствующего качества, или, скажем, удельный вес соответствующей компоненты. Например, в чемодане двое брюк, несколько рубашек, сколько-то пар носков… Плюс книги, плюс лекарства и предметы личной гигиены. Все вместе это составляет целостность особого рода — багаж, — но это вовсе не обязательно пространственно-временная целостность.

Разумеется, и здесь нет абсолютных границ. Наборы могут перерастать в пространства, если разные качества удается свести к одному (как на рынке любые товары представлены только их стоимостью); наоборот, так называемые фазовые пространства, в которые по осям отложены разнородные величины, по своим свойствам приближаются к наборам…

Многомерное пространство представляет некоторое качество, которое выражается через отдельные свойства, «частичные» качества. Количество в такой двухуровневой структуре также становится иерархическим: количество целого связано с количествами по каждому измерению. На практике это означает, что отдельные компоненты уже не будут независимыми — на эти величины наложена связь в физическом смысле, ограничение на возможные движения. Обычное евклидово пространство увязывает квадрат длины вектора с квадратами длин проекций на оси координат; величина банковского капитала увязана с курсами отдельных валют или котировками ценных бумаг. Кроме того, качество многомерности связано с количеством особого рода — количеством и порядком перечисления измерений (будь то просто нумерация векторов базиса или расстановка экономических приоритетов). Оба этих показателя связаны с локальными (метрическими) и глобальными (топологическими) свойствами пространства. Здесь мы будет говорить только о количестве измерений — размерности.

Итак, чтобы формально построить многомерное пространство, требуется перечислить отдельные измерения в определенном порядке и связать количественные характеристики элемента многомерного пространства с его количеством по каждой из компонент. Если связь симметрична, пространство в целом будет обладать соответствующей симметрией. В частности, метрика в евклидовом пространстве инвариантна относительно преобразований отражения, сдвига и вращения. Количественно, размерность пространства равна количеству его измерений (размеру каждого возможного «базиса»). Еще раз вспоминаем, что такая картина справедлива только на условиях физической локальности (в рабочей зоне пространственно-временной модели): при очень больших и очень малых «расстояниях» связи видоизменяются, количество переходит в качество и т. д.

Допустим, конструирование пространств целой положительной размерности мы освоили. Почему бы не приложить это умение к самим пространственным измерениям, представляя из многомерными пространствами?

Тут уместно указать, что в двухуровневой структуре (пространство в целом — отдельные измерения) не только качество верхнего уровня становится иерархическим («расщепляется» на качества компонент), но и качество по каждому измерению уже не будет тем же самым, как если бы мы интересовались производством только этого, частичного продукта. Отпечаток целого на единичностях часто искажает самую суть, радикально меняет их качество. Одно дело — когда мы стараемся удовлетворить потребности людей, и совсем другое — когда речь идет о производстве чего-то на продажу; в последнем случае вместо полезной вещи в рыночной экономике допускается и недоделка, и суррогат, и даже нечто вредительское… В математике дела, как правило, обстоят не столь трагично; однако легко заметить, что к качеству каждого измерения добавляется еще один уровень: способность играть роль измерения с таким-то номером в пространстве такой-то размерности. Точно так же, иерархическим становится количество: не только координата, но и номер ее позиции в списке координат. Иерархические структуры отдельных измерений и иерархическая структура пространства в целом — разные представления одного и того же, обращения иерархии.

Отношение пространства в целом к отдельным измерениям характеризуется числом N — размерностью пространства. Но точно так же и отношение отдельной компоненты к целому можно характеризовать числом $1 / N$ — размерностью подпространства. Пространство само по себе может иметь целую размерность M; взятое в качестве подпространства пространства размерности N, оно будет иметь размерность M / N. Так мы приходим к идее рациональной размерности.

Зайдем теперь с другой стороны. Допустим, у нас есть N-мерное пространство. Каждая из его осей (в любом базисе) взятая как подпространство имеет размерность $1 / N$. Но пусть теперь каждое измерение имеет свои компоненты и оказывается пространством размерности M. Тогда его качество, отнесенное одновременно и к объемлющему пространству, и к пространствам-компонентам, характеризуется количественной размерностью M / N. При различных способах построения, полученное пространство имеет ту же рациональную размерность. Это ничем не отличается от исходных геометрических представлений: можно отрезок длины M разделить на N частей — а можно отложить M раз отрезок длины $1 / N$. В каждом из этих подходов, представляя каждую точку исходного пространства пространством размерности k (которое вполне может оказаться и рациональным числом) мы получим пространство размерности $kM / kN \sim M / N$.

Разумеется, формальные конструкции становятся осмысленными лишь в контексте некоторой деятельности, которая допускает подобную иерархизацию. Традиционно, математика не интересуется происхождением изучаемых объектов и соотношениями разных уровней; для нее размерность пространства дана сама по себе, независимо от каких-либо других пространств. Это нормально, когда на практике поведение системы не зависит от способа включения в контекст (другую систему). Если же такое включение связано с модификацией наложенных связей (появлением новых взаимодействий), учитывать контекстную зависимость придется. Рациональные числа можно привести к целым, развертывая дополнительные размерности и накладывая дополнительные связи. При переходе к вещественным размерностям опираться на соизмеримость уже нельзя — и тут естественно говорить об иерархии вложений, когда процессы одной размерности протекают в пространстве другой размерности.

На ум сразу же приходят современные «теории всего», с их многочисленными «свернутыми» измерениями. Вероятно, сходство не случайно. Однако в природе, скорее всего, нет предпочтения одной размерности другой, и реализуются самые разные иерархические структуры. Мы сможем это обнаружить, лишь перестраивая нашу деятельность так, чтобы выявить дробные размерности. Намек на такую возможность — в указанных выше двух методах конструирования пространств рациональной размерности, внешним и внутренним образом: что мы не можем увидеть из-за нашей собственной пространственной организации, можно сделать наблюдаемым в качестве внутреннего свойства наблюдаемых систем. Нечто подобное мы на каждом шагу встречаем в квантовой физике. Однако хотелось бы подчеркнуть, что интерференция виртуальных процессов возможна даже без квантования, в чисто классических системах нецелой размерности. Вероятно, это окажется одним из проявлений относительности различия квантовой и классической теории.

1998

Фантазии и реальность

Математика бывает разная. Большинство ученых работают над вполне конкретными задачами, совершенствуют формальный инструментарий в интересах практиков (включая математические приложения). Здесь вполне уместно попробовать разные варианты и подобрать наиболее жизнеспособные схемы. Еще одна категория — математические забавы, решение абстрактных головоломок, не имеющих практического значения. Математики-любители таким способом осваивают накопленный за столетия теоретический материал; для профессионалов это и отдых от производственной рутины — и возможность расширить кругозор, поднатореть в смежных (или не очень близких) отраслях. Наконец, есть фундаментальная наука — основы математики, технология обоснования приемов формализации, а заодно и самооправдания перед лицом влиятельных спонсоров.

Со стороны фундаментальная математика часто выглядит полнейшим бредом. То есть, конечно, мы можем понять, когда уважаемый человек на досуге вырезает из бумаги солдатиков; но если он всерьез намерен создать таким образом сильнейшую армию и покорить мир — надо выяснять, что у него не так с общей биохимией и с функциональными системами мозга. Разумеется, не все болезни надо лечить: безобидный идиотизм требует лишь регулярного присмотра и минимальной поведенческой коррекции. В отличие от шизофрении, когда человек сознает болезненность своих фантазий, и ему от этого больно, большой математик живет в своем выдуманном мире — и совершенно счастлив, будучи уверен, что это и есть единственно правильная реальность. Все окружающее он воспринимает как несовершенные «модели» непреложной истины — и видит лишь то, что лично его в этом устраивает.

Конечно, случается такое не только с математиками. Но если, грешным делом, я начну заваливать академические инстанции стройными теориями почкования зеленых чертиков — меня, в лучшем случае, пожизненно занесут в черные списки и от чего-то отлучат; в тяжелых вариантах — можно и в медицину подзалететь. Ну а какой-нибудь (и без того небедный) дядя становится еще богаче за открытия в области недоказуемости нетривиальности…

Типичная фундаментальная теория возникает так: мы примерно знаем, как устроены какие-то вещи, — давайте вообразим себе, что есть нечто, устроенное не так, и выясним, какие у этого нечто можно было бы наблюдать особенности. До какого-то момента все путем. Мы не знаем, что у нас получилось, — но можем это как-нибудь назвать (язык все стерпит) и наиграться в бумажных солдатиков на всю оставшуюся жизнь. Проблемы идут косяком, когда автор (возможно, коллективный) забывает, что он сам все выдумал, и начинает приписывать миру то, чего там отродясь не было. Другие авторы начинают с уже отформатированного бреда — и выясняют, что можно в нем дофантазировать, чтобы получить следующую, еще более надуманную теорию. В итоге имеем то, что имеем: полный отрыв фундаментальной математики от жизненных (и научных) реалий.

Самое забавное — что даже в такой безбашенной математике рождается немало ценного и полезного. Мир сам по себе — основа всему, и болезненные извращения возможны лишь в рамках объективной необходимости. Извращенность науки — отражение болезней общества, недостаточной разумности современного человечества. Соблюдение правил игры приобрело самоценность на этапе перерастания доисторической дикости в дикость цивилизованную: удержать вместе не умеющих по-человечески общаться можно только в рамках формального общения. С распадом классовой экономики (если кто-нибудь до него досуществует) все значительно упростится — хотя бы потому, что уже не надо будет никому ничего доказывать.

Заметим, что в любой, сколь угодно заумной теории где-то в глубине прослеживаются вполне земные корни. Поэтому господа-изобретатели, как правило, не производят на свет ничего нового, а лишь переносят уже известное на свой фантастический мир, — и мы снова и снова встречаемся с теми же идеями точки, числа, порядка, сложения и умножения… И все в рамках приличий: усеченная двузначная логика, подведение особенного под всеобщее, дедуктивный метод, искусственная структурность и внушительный ссылочный аппарат. То есть, все очень красиво — только непонятно, о чем и зачем. Насчет убедительности — тут мы не будем. Математические доказательства даже больших математиков уже не убеждают. А сам факт возможности произвольно переиначить любую «строгую» теорию — намек на скрытую (а иногда и неприкрытую) нестрогость. Для чего, конечно, тоже придуманы ученые слова. Например, в нестандартном анализе из кожи вон лезут, чтобы доказать существование нестандартных индивидов. Каких только ультрафильтров не наваяют! А в итоге приходится признать, что все сводится к банальной аксиоме выбора (или какому-то из ее эквивалентов). Которая давно уже стала своего рода эталоном, символом свободы произвола. И если пресловутые классы Рассела таки запретили — то без аксиомы выбора полету математической фантазии просто швах.

Нестандартный анализ обсуждает придуманные сущности, исходя из набора правил *ad hoc*. Конструкция искусственно заточена под уже известные результаты анализа, и обладает лишь некоторой эвристической ценностью. Почему? Да потому что никаких житейских примеров для населяющих теорию гиперобъектов до сих пор нет. По жизни у нас все рационально. Даже вещественные числа — уже за гранью практически доступного, и судить о них мы можем только по косвенным приметам, интерполируя цепочку наблюдений. Более масштабные бесконечности вылезают в квантовой теории — однако они предусмотрительно объявлены ненаблюдаемыми, чтобы не пришлось по жизни переселяться в какое-нибудь гильбертово пространство… Значит ли это, что математические бесконечности — все как один порочны? Отнюдь. Просто работать с бесконечностями надо аккуратнее, и не выдавать игру воображения за факт бытия.

В качестве иллюстрации — обратимся к обычной математике ординалов. Про целые числа все знают. Когда их используют для указания порядка пересчета, они называются конечными ординалами. За каждым целым числом следует еще одно, и так можно повторять, пока не надоест. Поэтому целые числа образуют своего рода эталонную шкалу для измерения всех вообще конечных вещей: при любой длине шага можно добраться из пункта A в пункт B за целое число шагов. Если на последнем шаге пролетаем слишком далеко — от предыдущего пункта идем шагами вдвое меньшей длины, и так далее. Пока не окажемся совсем рядом (в пределах требуемой точности). Понятно, что можно с самого начала было выбрать достаточно маленькую длину шага, и тогда расстояние между A и B выражается целым числом. В честь древнего грека, такие шкалы называются архимедовыми.

Тут математики начинают показывать ловкость рук. Любимый фокус — индуктивные (рекурсивные) определения. Утверждается, что, если есть целое число 1, и за каждым целым числом n следует целое $n + 1$, то существует рекурсивно определенное множество N, содержащее все вообще целые (натуральные) числа. Всякий нормальный человек тут же увидит полнейшее тождество этой логики аксиоме выбора: если из каждого множество выбрать по одному элементу, эти элементы составят некоторое множество. Учитывая, что конечные ординалы часто представляют множествами (по схеме фон Неймана), сходство становится просто разительным. Однако математики будут возражать: это другое…

Ладно, пусть другое. Но почему, собственно, из возможности что-то построить вытекает его существование? Теоретически, в любом достаточно просторном месте можно построить дом. Но если я захочу построить себе махонький домик в Париже на площади Конкорд — кто мне даст? Поэтому жить приходится в другом месте. Мы знаем, что можно вообразить себе целое число, большее любого наперед заданного (а не абстрактно обозначенного буквой n) целого числа. Из этого никак не следует, что такое целое число уже построено. Может быть, оно пока никому еще не потребовалось — и остается только в возможности, а отнюдь не на самом деле. А какой-нибудь компьютер может сказать, что у него не хватает разрядности для таких чисел, и на самом деле построить его вообще нельзя, а можно только вообразить. Надо быть математиком, чтобы так беспардонно путать фантазии и действительность.

Еще раз ладно, проглотим не очень красивые фокусы и допустим, что существует объединение всех вообще целых чисел. Но почему это обязательно будет множеством? После парадоксов Рассела все, вроде бы, согласились считать множествами только элементы некоего стандартного универсума. А все остальное называть классами — и при их обсуждении не требовать особой строгости. В нестандартном анализе доказывают, что набор N не является «внутренним» множеством — не принадлежит стандартному универсуму. Но по старой традиции его все равно объявляют множеством (хотя бы «внешним»), а заодно говорят и о множестве всех действительных чисел, и множестве всех подмножеств некоторого множества… Эти словесные вольности не безобидны. Из них вырастает безумно абстрактная игра бесконечностями.

Если мы все же согласимся считать N множеством, встает вопрос о количестве элементов. Понятно, что оно больше любого заранее заданного целого числа — и мерить такие числа надо как-то иначе. Нам говорят, что количество элементов множества N бесконечно, и для него следует использовать какое-нибудь специальное обозначение: например $\aleph_0$ (подразумевая, что могут быть и другие бесконечности, обозначаемые соответственно). Вообще-то для обозначения бесконечности у нас уже есть знак ∞. Спрашивается, зачем нужен еще один? Ответ: чтобы играть было интереснее. А к реальности это с самого начала отношения не имеет. То есть, есть бесконечность вообще (∞) — и есть конкретные типы бесконечности: кардинальные числа и ординалы.

Поскольку «множество» N по определению больше любого конечного множества (каждое из которых есть одна из реализаций, «модель» целого числа), оно представляет некоторое порядковое число, большее всех конечных ординалов. В этом контексте его обычно обозначают знаком ω. Дескать, мы его придумали — и поэтому оно существует. Дальше — больше. По аналогии с натуральными числами, предполагают существование (бесконечного) ординала $\omega + 1$, который строго больше, чем ω. А дальше — опять фокус с индукцией, и нам преподносят якобы существующее множество $\omega + n$, для всех (конечных) целых n. Потом идет ординал $\omega + \omega = \omega \cdot 2$, к которому тоже можно прибавить единицу, — и пошло-поехало: получите любые комбинации вида $\omega \cdot k + n$, а потом еще и $\omega \cdot \omega = \omega^2$, и все последующие по той же схеме. Красота! Играться можно очень долго — до (счетной) бесконечности ε_0, плюс что-то за ней, и еще дальше — к первой несчетной бесконечности ω_1 … Для фантастических бесконечностей вводят набор аксиом — а дальше это становится точной наукой, предметом профессиональной гордости и высокодоходным бизнесом.

На дилетантский взгляд, все очень и очень странно. Если, например, аксиому $\alpha + 0 = \alpha$ для любых ординалов еще как-то можно принять — то аксиомы $\alpha \cdot 0 = 0$ или $\alpha^0 = 1$ вызывают серьезные сомнения. Нас в школе учили, что $\infty \cdot 0$ и ∞^0 — это «неопределенности», которые надо честно «раскрывать», используя дополнительную информацию (в каждой ситуации получается по-своему). Далее, операция сложения для ординалов оказывается некоммутативной:

$$\omega + 1 > \omega,\ 1 + \omega = \omega$$

В общем случае сложение приходится определять через задний проход:

$$\alpha + \gamma = \sup\{\alpha + \beta \mid \beta < \gamma\}$$

Однако всем хорошо известно, что существование точной верхней грани в обществе бесконечных чисел — это не самый тривиальный вопрос; вообще говоря, тут без (подпольно протаскиваемой) аксиомы выбора никак не обойтись. Понятно, что если наших солдатиков предполагается использовать в условиях применимости всех сделанных допущений, — тогда сколько угодно. Для игры сгодится. Но в науке так не бывает: нам надо строить не теорию абы чего, а удобный рабочий инструмент, для практических нужд. Где применимость формул определяется предметной областью, а не благими пожеланиями.

В нестандартном анализе замечают, что числа вида $\omega - n$ также оказываются бесконечно большими (больше любого целого числа). Неопределенность вида $\omega - \omega$ понимаются в смысле еще одного гиперцелого числа, которое меньше ω, но больше любого целого. Класс гиперцелых чисел оказывается, таким образом, всюду плотным: между любыми двумя бесконечностями возможно вставить еще одну. С одной стороны, это делает подход ближе к стандарту упорядоченного поля; но с другой стороны, существование всех этих бесконечностей остается вопросом субъективного произвола.

Законный вопрос: а почему мы вдруг решили пожертвовать именно коммутативностью сложения и умножения, а не какими-то еще свойствами целых чисел? То есть, полученное упорядочение бесконечностей все равно уже не будет полем, и от чего-то надо отказываться. Но давайте определим сложение как-нибудь иначе; например

$$\alpha + \beta = \sup\{\alpha' + \beta' \mid \alpha' < \alpha \;\&\; \beta' < \beta\}$$

Такое сложение очевидно коммутативно и обладает замечательными свойствами: $\omega + 1 = \omega$, $1 + \omega = \omega$, $\omega + \omega = \omega \cdot 2 = 2 \cdot \omega = \omega$. Тогда весь зоопарк счетных ординалов становится полнейшей фикцией: есть одна-единственная счетная бесконечность, и мусора меньше в голове. Дальше мы таким же способом вводим отдельную бесконечность для отрицательных целых чисел: $-\omega$, так что $-\omega - n = -\omega$. Тем самым, у нас есть полностью упорядоченное поле с одним маленьким исключением: неравенства $n + 1 \geq n$ и $n - 1 \leq n$ — не всегда строгие. Но это значительно слабее, чем отказ от коммутативности! Теоретически, можно положить $\omega - \omega = 0$, $\omega + (-\omega) = 0$. Тогда наша система оказывается замкнутой по отношению к сложению и вычитанию. Однако более корректное решение — в русле обычного анализа, считать это неопределенностями типа $\infty - \infty$, которые надо раскрывать, исходя из дополнительной информации.

Таким образом, фантастические миры господ-математиков нормальному человеку совершенно ни к чему. Есть положительная и отрицательная бесконечности — и естественно определяется переход к бесконечному пределу. Точно так же, есть единственная бесконечно малая величина $1 / \omega$ (предел сверху) — и ей соответствует бесконечно малая $1 / -\omega$ (предел снизу). Мы полностью остаемся в рамках стандартного анализа, и любуемся стройной красотой.

Заметим, что существование несчетной бесконечности $\aleph_1$ (или ω_1) — это особый разговор. Но заранее ясно: все гораздо проще, чем то, в чем нас пытаются убедить. Так, легко видеть, что наше «симметризованное» определение сложения прекрасно работает и для действительных чисел — а это значит, что счетная бесконечность ω в этом случае совпадает с несчетной бесконечностью ω_1 и всеми прочими несчетными ординалами! То есть, несчетность не сводится к чисто количественной определенности — это качественное различие дискретности и непрерывности, которые прекрасно сосуществуют и в ограниченной области — например, в интервале (0, 1). Заодно оказывается, что счетность пространства рациональных чисел — иного свойства, нежели в натуральной последовательности. Отсюда много чего следует.

Если научиться аккуратно работать с множествами и их отображениями, и не слишком верить в слова «и так далее» (определения по индукции), — можно приручить и бесконечности высших порядков, подружить их с реальностью. Тогда мы и в квантах не запутаемся, и световой барьер нам не указ!

1997

Безумие Кантора

Со школьной скамьи мы знаем, что есть числа бывают натуральные и вещественные. Все остальное (рациональные, комплексные числа, кватернионы, октонионы, трансфинитные числа, ординалы и т. д.) — это уже не совсем числа, и возникают они как структуры над собственно числовым фундаментом (с какими-то топологическими соображениями). На самом деле, даже про вещественные числа не очень понятно: рассуждения о предельном переходе в пучке последовательностей рациональных чисел для большинства грамотных людей неубедительны, хотя бы потому, что мысль об окончательном результате бесконечного процесса сама по себе кажется логическим противоречием, ошибкой в определении. Вещественная математика, как известно, возникла для обслуживания повседневного быта (землемерие, сравнение объемов и масс), и соотносятся вещественные и целые числа как измеряемое и результат измерения, как вещь — и ее восприятие. Что вовсе не одно и то же. Мы в курсе, что наши представления о мире заведомо неполны, что относятся они лишь к небольшой части его, а именно: к тому, что нас практически интересует в данный момент. Есть мотивы, есть цели. И есть море всего прочего, что не имеет отношения к делу. Отсюда идея дискретности и непрерывности. Которые несводимы друг к другу по той простой причине, что относятся к разным предметным областям, и потому их невозможно непосредственно сравнить.

Но в академической математике изначально предполагается, что любые конструкты ничем друг от друга в принципиальном плане не отличаются, и отношения между ними чисто формальны, а потому одно всегда сводится к другому (или выводится из него). Все природное богатство мы сплющиваем в нечто плоское и безликое. Математическое описание мира — верх грубости, приблизительности, неполноты. Иногда такие абстракции полезны. Но всеобщность редукции, ее повсеместная обязательность — это иллюзия. Платить за неумеренные амбиции, увлечения и преувеличения приходится логическими неувязками, шаткостью оснований. Отсюда столь пристальное внимание к форме, щепетильность по поводу соответствия стандартам изложения. Точно так же, как показная вежливость или дресс-код в цивилизованном обществе скрывают взаимную ненависть и вульгарность.

Как только мы перестаем замечать различия между целыми и вещественными числами, встает вопрос о самом их существовании: что это? — две разных конструкции или одно и то же? Формальное образование подсовывает традиционный ответ: сопоставить взаимно однозначно вещественные числа с натуральными никак не получится — это со всей строгостью доказал великий Кантор. За что и умер в психиатрической больнице. А равенство бесконечностей мы (вслед за Кантором) понимаем исключительно как изоморфизм: обратимое отображение одного на другое с сохранением существенных свойств.

Уже эта последняя формулировка вызывает скептические вопросы. Даже актуальное существование бесконечностей во времена Кантора далеко не все математики были готовы принять. Тем более непонятно, что такое отображение одной бесконечности на другую. И совсем неясно, какие именно свойства следует считать существенными. Потом придумали манеру говорить о непонятностях формально, безотносительно к осмысленности такой науки. Называется это аксиоматический метод — и следовать ему обязаны все от мала до велика, под страхом вечного отлучения не только от математики, но и от всякой вообще науки. Однако заметание мусора под ковер, запрет думать о белой обезьяне, — никоим образом не отменяет реальных проблем. В частности, проблем логических. От которых якобы точная математика становится совершенно неубедительной.

Напомним хрестоматийную диагональную схему канторовского доказательства. Прежде всего, вещественные числа (для определенности, на отрезке $[0, 1]$) следует отождествить с последовательностями нулей и единиц. Предполагается, что каждая такая последовательность есть запись вещественного числа в двоичной системе счисления, и что всякое вещественное число представимо в двоичном виде. Пока не будем заострять внимание на сомнительности логики «в оба конца» и нетривиальности самого понятия «система счисления» (или, по Кантору, «фундаментальная последовательность») и на изначально встроенной в теорию возможности сопоставления бесконечности другой. Далее, допустим, что все вещественные числа можно пронумеровать — однозначно сопоставить элементам натурального ряда. Еще раз: мы нумеруем бесконечные последовательности — но возможность за обозримое время проверить соответствие последовательности ее номеру пока не обсуждается. Для последовательности с любым конечным номером n можно установить, чему равен ее n-й член (это либо 0, либо 1). Соответственно, легко взять 0 вместо 1, — или наоборот, 1 вместо 0. Тогда всякому натуральному числу n ставится в соответствие вполне определенная двоичная цифра — и в итоге мы имеем двоичную последовательность, которая не может совпасть ни с одной из ранее пронумерованных (поскольку — по построению — отличается от последовательности с номером n в n-й цифре). По исходному определению, всякая двоичная последовательность (а значит, и мысленно сконструированная нами антидиагональ) должна соответствовать некоторому вещественному числу. Но (анти)диагональной последовательности не соответствует ни один из ранее назначенных номеров — а это противоречит допущению о том, что все вещественные числа пронумерованы. А значит, имеются достаточные основания, чтобы отвергнуть гипотезу о перечислимости вещественных чисел — и ввести в математику сколь угодно большие «кардинальные числа» — уровни актуальной бесконечности.

Логичный вопрос: если рассуждению предшествует несколько весьма проблематичных допущений — почему полученное в итоге противоречие следует считать опровержением лишь одного из них? Откуда у остальных иммунитет? Даже если какие-то из посылок отвечают старинной традиции, даже если они выведены как теоремы в какой-то другой теории, — это никоим образом не отменяет их уязвимости в новом контексте. Следуя аксиоматическому методу, можно отменить любой математический результат: достаточно усомниться в одной из аксиом или в уместности правил вывода. Казалось бы, безобидная перепланировка, лишний кирпичик, — но от этого может обрушиться весь дом. Точно так же, одного противоречия достаточно, чтобы опровергнуть всю систему целиком — а не только сиюминутное дополнение.

Например, предположение о том, что выбор по одной цифре из бесконечного числа бесконечных последовательностей должен в итоге дать качественно такую же бесконечную последовательность, — это прямая отсылка к пресловутой аксиоме выбора, приемлемость которой до сих пор вызывает немало вопросов. Наглядно проиллюстрировать нетривиальность проблемы позволяет переформулировка канторовского «доказательства» для трансфинитных чисел. Действительно, заметим, что всякое натуральное число, как и вещественное, представимо двоичной последовательностью двоичных цифр — однако для каждого натурального числа эта последовательность оказывается «конечной»: после какого-то номера все ее элементы равны нулю (заметим, правда, что для установления этого факта не существует эффективной процедуры). Допустим теперь, что все такие последовательности можно перенумеровать. Дальше воспроизводим диагональное построение — и получаем «число», которое не принадлежит натуральному ряду. В чем отличие от рассуждений Кантора? В том, что работали мы исходно с «конечными» последовательностями — а получили последовательность другого типа, «бесконечную». Можно считать это представлением некоторого «бесконечно большого» целого числа, и строить развитую трансфинитную математику. Но вернемся к школьному варианту: почему бы не допустить, что диагональный метод в применении к «перечислимым» вещественным числам порождает последовательность иного типа — «неперечислимое» вещественное число? Здесь возможна вполне содержательная математика, разделяющая вещественные числа по уровням внутренней сложности. Мы же различаем просто иррациональные — и трансцендентные числа. Почему бы не поговорить о более тонких различиях?

Есть и другие, столь же законные направления мысли. Пусть антидиагональ — обычная последовательность двоичных цифр, и должна соответствовать вещественному числу. Заметим, что она не совсем чужда натуральным числам: ее запросто можно включить в состав исходного перечисления, если увеличить все исходные номера на 1, а диагонали присвоить индекс 1. Выполняя диагональный трюк еще раз, получим новую диагональную последовательность. которую тем же порядком включим в перечисление. Что получается? С одной стороны, вещественные числа нельзя перенумеровать, а с другой — нет такого вещественного числа, которое нельзя было бы учесть в одной из возможных нумераций. Вещественные числа и перечислимы, и не перечислимы одновременно. Это противоречие говорит о том, что само понятие перечисления для бесконечных совокупностей нуждается в уточнении.[11]

В самом деле, как можно было бы перечислить элементы конечного множества? Мы запускаем лапу в мешок, достаем первый попавшийся элемент — и рисуем на нем очередной номер. Дальше события могут развиваться по-разному. Например, метод исчерпания предполагает, что пронумерованные сущности мы отправляем в другой мешок (другое

[11] Легко видеть, что описанный здесь метод переопределения номеров подобен технологии перенормировок в квантовой теории поля, которая, по сути, и есть выделение самодействия физических систем (операторной диагонали) в особую ветвь, которую надо трактовать особо, приводить к сопоставимым с остальными вкладами единицам.

множество), и достаем по очереди все оставшиеся элементы, пока в исходном ящике не станет пусто. Нумерация в таком исполнении оказывается последовательностью пар непересекающихся множеств — структура очень нетривиальная (известная как разбиение единицы)… Другой вариант — отправить пронумерованный элемент обратно к его товарищам и ловить следующий на удачу: если на нем уже есть номер — оставляем как было, если нет — рисуем следующий. Нумерация тогда формально представляется стохастическим процессом, вероятностным распределением. В любом случае есть разного рода предметные осложнения. Просеивание остатков — процедура не самая эффективная: первый подход ставит перед нами проблему отлова элементов в очень разреженных средах; во втором — никогда нельзя уверенно сказать, все элементы уже пронумерованы или остался кто-то статистически неуловимый. Если же элементы множества — вполне конкретные вещи, не факт, что они легко переживут процесс пересчета. Например, в первом варианте, если мы вытаскиваем живую рыбу и перекладываем на лед — вместо живых номеров получаем номера мертвые; второй вариант гуманнее — но не факт, что рыба с номером или без будет жить вечно, дожидаясь окончательного вердикта.

Можно, конечно, заявить, что степень одушевленности предмета не имеет для нас значения в рамках данной конкретной теории. Тем самым возвращаемся к проблеме существенных свойств, которая, по всей видимости, отнюдь не легче исходной, ибо привносит в теорию еще и требование формального выведения критериев применимости.

Сразу ясно: обобщить перечисление на бесконечные множества — дело непростое и далеко не однозначное. Допустим, изобрели мы способ перенумеровывать не случайным образом — а по какому-то принципу. То есть, есть эффективная процедура вычислить номер для всех подходящих по типу чисел. Но где гарантия, что не найдется чисел другого типа? Для таких потребуется своя процедура, плюс правило слияния перечислений. Не проще ли принять, что бесконечность — это не актуальное существование, а процесс, которому (пока?) нет завершения. Конечное в таком понимании = законченное. Это наше настоящее; а прошлое и будущее — бесконечность.

Если честно, то не все так просто. Иерархия настоящего содержит особые уровни — образы прошлого и будущего. Точно так же, в любой бесконечности выделяются конечные структуры — своего рода проекция настоящего, перенос точки отсчета (как в английской грамматике: *future in the past*, *future perfect*). Но это тема для другого разговора.

Вернемся к Кантору. Трудно со всей определенностью установить: то ли непонимание современников довело беднягу до помешательства — то ли он успешно заразил последующие поколения своими болезненными теориями. Скорее всего, оба предположения верны. Ясно одно: строить теорию множеств вообще — значит, вообще ничего не строить. Пока мы не определились с тем, что именно способно становиться элементами интересующих нас множеств, пока наши конструкции не станут предметными, — нам просто не о чем разговаривать, и нет в этом никакой науки — сплошная беспредметность. Мы просто не знаем, как с чем обращаться, что можно и чего нельзя. Заметим: никто не запрещает рассматривать множества абстрактных идей — но не каких угодно, а совместимых, естественно связанных логикой предмета. А всякий предмет, помимо всего прочего, предполагает единство противоположностей: конечности и бесконечности, дискретности и непрерывности, границы и безграничности… Если мы собираемся изучать числа — первичные, всеобщие противоположности логично заложить в теорию с самого начала: например, в виде натурального ряда и вещественной оси. Здесь не требуется ничего доказывать — это исходный пункт развития. Потом будем честно исследовать практически полезные свойства предмета — или иногда интересоваться всякой экзотикой, в качестве поиска иной предметности. Попытки формально обосновать то, что обусловлено лишь объективно данным порядком вещей, — болезненное самокопание, нездоровая рефлексия, логический круг, вывод себя через себя, убогая диагональ. Извращение, ненормальность. Хорошо, если безумие Кантора поможет нам это осознать.

ноябрь 1984

Осколки зеркала

Кто-то когда-то заметил, что философ — это человек, обнаруживающий непонятную сложность в самом простом и общепонятном. Проиллюстрировать это можно математическим примером на уровне средней школы.

Существует такое понятие: разбиение множества на непересекающиеся классы. То есть, каждый элемент множества обязательно принадлежит одному из классов — но не может принадлежать сразу двум. Вообще говоря, разбивать можно разными способами — и одно разбиение с другим никак не соотносится.

Есть другое понятие: на множестве может быть задано симметричное, транзитивное и рефлексивное отношение — которое по традиции называется эквивалентностью. Не в том смысле, что эквивалентные элементы обязательно совпадают, а только что в этом конкретном отношении их можно считать одинаковыми. Опять же, эквивалентностей можно придумать сколько угодно, и одна на другую не всегда похожа.

Без малейших колебаний школьный учитель доказывает, что всякое разбиение на непересекающиеся классы задает некоторое отношение эквивалентности, — и что множества эквивалентных элементов любого множества образуют разбиение исходного множества на непересекающиеся классы. Таким образом эквивалентность и разбиение оказываются разными способами говорить об одном и том же.

Тут приходит философ — и прямо с порога спрашивает: а всегда ли возможно разбить множество на непересекающиеся классы? — и не бывает ли множеств, для которых никакая эквивалентность не устанавливается? А если понятия не везде определены, как можно говорить об их взаимосвязи — и уж тем более что-то доказывать?

Вопросы, конечно, глупые. Мы же сами, своим произволом придумали исходное множество — так что нам может помешать придумать хотя бы одно подмножество и наугад укомплектовать его какими-то элементами? Тогда все, что не принадлежит подмножеству, образует его дополнение — а подмножество вместе с его дополнением очевидным образом разбивают исходное множество на непересекающиеся классы. Точно так же, имеем полное право выбрать сколько-то элементов и своим произволом объявить их эквивалентными; все остальные элементы выбранным не эквивалентны — и в этом смысле эквивалентны между собой. То есть, в любом случае можно поделить хотя бы на два класса — а более сложные конструкции получаются при помощи волшебных слов: *и так далее…*

По кислой физиономии философа видим, что ответ его не устраивает. Позвольте, — возражает он, — но непринадлежность одному множество вовсе не означает принадлежности другому! Если это не гвоздь — он вовсе не обязательно будет шурупом: есть еще саморезы, винты, и прочий крепеж — о существовании которого мы можем и не знать, пока не столкнемся на практике. Если же вы утверждаете, что нет в исходном множестве ничего, что не принадлежало бы либо вашему произвольному подмножеству, либо его дополнению, — вы, фактически, заранее предполагаете, что множество *уже* разбито на две части, — и тогда, конечно, искомое разбиение существует! Но это никоим образом не отменяет возможности чего-то не столь тривиального.

Совершенно аналогично, возможность явочным порядком ввести эквивалентность выбранных элементов множества вовсе не означает одинаковости оставшихся. Ваше рассуждение предполагает, что из неэквивалентности двух элементов некоторому третьему следует их эквивалентность между собой — а это очень сильное утверждение, допущение о связи двух совершенно разных отношений! Справедливо оно только в особых условиях, которые надо честно оговаривать; а тем самым неявно постулируется то, возможность чего вы пытаетесь продемонстрировать.

Простейший пример. Допустим, в качестве множеств у нас только открытые шары; тогда ни одно из этих множество нельзя разбить на непересекающиеся классы в рамках той же топологии; более того, даже конечное (или счетное) покрытие не всегда возможно. Говорить о разбиениях можно только при расширении исходного универсума — а это уже другая математика. Точно так же, если отношение эквивалентности взято само по себе — оно вообще не предполагает других отношений (в частности — неэквивалентности): мы можем сказать, про любые два элемента, эквивалентны они или нет, — и это будет удовлетворять нашим трем аксиомам, и каждый элемент становится представителем класса эквивалентности, — но мы, вообще говоря, не знаем, существует ли такой набор представителей, чтобы соответствующие классы покрывали исходный универсум целиком.

Такова элементарная логика. Разумеется, всегда можно ограничиться работой лишь с «хорошими» множествами, для которых все наши теоремы справедливы. Но в этом случае любые «доказательства» становятся неубедительными: мы лишь формально конструируем объекты заданного типа, подгоняем нашу теорию под желаемый результат.

Так ли уж все плохо? В конце концов, любые науки заняты именно этим: им важно привести свое строение к соответствию с предметом. Демистифицированная (предметная) математика становится одной из наук — и перестает быть формой религиозного сознания. И в результате занимает свое настоящее место — и нам есть, за что ее уважать.

Возможно, кому-то из математиков станет не очень комфортно: например, обожаемые всеми доказательства от противного оказывают вовсе не доказательствами, а лишь эвристиками, мотивировками принятых решений — истину которых придется устанавливать как-то иначе. Действительно, если мы выяснили, чем что-то не является, — это никоим образом не говорит о том чем оно является на самом деле; отрицательные определения — первый этап всякого познания: нащупывание предмета, поиск, ориентировочное поведение. Впрочем, учитывая условность всех прочих доказательств (которые могут порождать лишь гипотезы), ничего трагического в этой неопределенности нет: мы работаем, делаем что можем, — а практика расставит все по местам, сохранит ценное.

Математическая теория возникает как и всякая другая: эмпирические соображения выделяют некоторый класс объектов, с которыми нам нужно разобраться (предметная область, «универсум»); мы указываем те качества объектов, которые для нас будут в этом контексте определяющими, — и все остальное пытаемся (по возможности формально) выразить в терминах этого «базиса». То есть, задача теоретика не «доказать» — а *связать*, привести одно к другому (но вовсе не вывести все из чего-то одного). Если строение предметной области достаточно детализировано, можно попытаться заключать по аналогии — превратить найденные связи в формальные схемы, позволяющие, с одной стороны, делать выводы из набора фактов (порождение гипотез) — и обратно, при наличии практической задачи предложить средства ее решения (обоснования, теоремы). То же самое делает, например, физик, когда он задумывает очередной эксперимент — или по виду спектра делает вывод о внутреннем строении квантовой системы. И то же самое делает каждый из нас, когда, заметив трещину в стене, предвидит возможность дальнейшего разрушения и прикидывает, какие материалы и инструменты нужны, чтобы устранить опасность. Разумеется, всегда есть шанс натолкнуться на такие явления, которые в теорию не вписываются, — и для каких-то проблем придется подыскать особые средства и процедуры.

Сухой остаток: обычные математические методы весьма полезны в тех условиях, для которых они изобретены, — в предположении существования достаточно широкого универсума, вдали от границ предметной области. Однако абсолютно универсальных схем не бывает, и надо относиться к полученным результатам с долей юмора, имея в виду, что получили мы лишь то, что хотели получить, — и в другой раз можем получить что-то совершенно другое.

Вернемся к разбиениям и эквивалентностям. Школьный вариант опирается на главную аксиому современной математики: все, что возможно построить, — уже построено. Различия между потенциальным и актуальным существованием математика не предполагает. В частности, всякое множество заранее подготовлено и будет терпеливо дожидаться, пока мы соизволим обратить на него внимание и что-нибудь по его поводу произнести. Это означает, что любые операции с множествами не порождают новых множеств, а лишь сопоставляют уже имеющиеся.

Говоря об объединении или пересечении множеств, мы имеем в виду, что два множества (из некоторого статического универсума) сопоставляют третьему; точно так же, идея подмножества сводится к сопоставлению одного множества с другим — и все такие сопоставления уже проделаны и готовы к употреблению. Формально такие структуры описывают при помощи интуитивной (неопределимой) конструкции «упорядоченная пара», и любые отношения (операции над множествами) представляют множествами упорядоченных пар.

Легко видеть, что не всякие два множества можно объединить или пересечь: для этого в универсуме должно существовать множество, представляющее результат операции. Например, в универсуме открытых шаров объединение существует тогда, и только тогда, когда один шар вложен в другой; если взять два непересекающихся шара, их объединение шаром уже не будет. То же самое справедливо по отношению к пересечению. Объединение и пересечение в таком случае сопоставляет двум шарам из области определения этих операций объемлющий и вложенный шары соответственно — это операции *проекции* упорядоченной пары на одну из компонент. Таким образом, выводимые в теории свойства множеств напрямую зависят от строения рассматриваемого универсума — и сколь угодно тонкие теоремы доказывают лишь то, что мы заранее предположили. В частности, существование разбиений невозможно, если его компоненты не входят в исходный универсум.

Поскольку отношения определены как множества, доказательство взаимно однозначного соответствия эквивалентностей разбиениям — чистейшей воды тавтология: возможность статически определить отношение эквивалентности предполагает, что соответствующие классы уже построены.

Другой традиционный подход — от алгебры. Правда, фоновый универсум (база) все равно предполагается — но он, вообще говоря, не обязан быть множеством, и требуется от него только одно: существование элементов, которые можно комбинировать при помощи (неформальных) операций. Что такое элемент или операция — мы не знаем; но нам это и не нужно, поскольку операции удовлетворяют определенным требованиям, а из этого можно уже делать выводы. Удобства ради предполагается, что операции определены для всех элементов базы: что нас не устраивает, то мы просто не рассматриваем. Если операций несколько, они могут иметь разные области определения — но мы ограничиваемся только тем, что поддерживает все операции (допуская иногда нескольких особых точек). Это называется полнотой. Понятно, что при таком раскладе ничего кроме тавтологий на выходе не ожидается. Но почему бы не поиграть на досуге пустыми формами?

В алгебраических структурах быстро возникают идеи представления операций элементами, а элементов операциями — а дальше работают принципы теории множеств. Фундаментальный постулат — существование области определения. Всякому элементу можно сопоставить все элементы, их которых он получен при помощи заданной комбинации операций (функции). Предполагая, что все мыслимые функции уже вычислены, допустимо мыслить набор прототипов как объект — класс эквивалентности. Требование полноты обычным порядком приводит к существованию покрытий или разбиений на классы.

В некоторых структурах элементы изначально разбиты на непересекающиеся классы; например, наряду с абстрактными (неформальными) элементами рассматривают также элементы уже известной алгебраической структуры (или множества). При этом функции различаются типом значения: одни дают «синкретический» элемент базы (то есть, по сути, базовую операцию), другие число… В принципиальном плане это ничего не меняет. Возможность трактовать область определения как класс — сильное допущение, которое заранее закладывает в теорию все выводимые свойства.

Предметная математика изучает вполне определенные (хотя далеко не всегда формально определимые) типы абстрактных объектов, и ее задача вытащить на свет всевозможные связи, своего рода схемы интерполяции для предположений о свойствах всего, что допускается конструировать, следуя правилам игры. В статической науке ответы неявно предполагаются. При этом нет особой разницы между суждениями разных типов — и никаких оснований делать одни схемы главнее других. Вся совокупность формальных приемов образует логику теории, одни уровни логики тесно связаны с другими, поскольку все вместе они дают понятие предмета конкретной науки. Например, привычка оперировать «логическими» связками (**не**, **и**, **или**, …) никоим образом не означает, что эта «символическая» логика существует сама по себе и дает какое-то «очищенное» от всякой предметности знание. Мы лишь пытаемся выстроить наши взаимоотношения с предметом, подгоняя его под привычные формы; для этого приходится переосмысливать логические операции в терминах предметных действий и организовывать предметную область так, чтобы все это работало. Если предмет не во всем согласен с шаблоном, мы его усложняем, заменяем одну логику другой. Преемственность в развитии наук редко требует радикального пересмотра схем — и какие-то приемы работы используются тысячелетиями (с бесчисленными «уточнениями»), — но иногда без новых парадигм уже не обойтись.

Познание движется от синкретизма, общего представления, чуткой интуиции, — к выделению вещей и свойств, — и далее к воссозданию исходной целостности из разнородного материала. Современная культура, рыночная экономика, основанная на всеобщем разделении труда, не позволяет завершить этот синтез: наука ограничивается классификацией и группировкой — ее больше интересует классовое неравенство. Отсюда в математике всевозможные декомпозиции и разбиения — а эквивалентность нам нужна только для того, чтобы подчеркнуть различия: все существенные свойства определяют для фактор-множества, для классов, а не для элементов. То, что не вписывается ни в один класс, — вне науки (и вне цивилизованного общества). Мир будущего, населенный одними сингулярностями, потребует иной математики. Всякое объединение будет лишь временным, относительным, ограниченным рамками конкретной задачи; переход от одного производства к другому связан с перестройкой предметной области. Это один из принципов иерархического подхода.

Как уже отмечалось, предметность неявно закладывается в строение исходного универсума — чтобы привести теорию в соответствие с потребностями практики. Остается сделать следующий шаг: отказаться задания от чего бы то ни было раз и навсегда, допустить «естественное» разнообразие, невозможность универсальной формализации. На то она и формализация, чтобы заниматься частными случаями. Научность не в том, чтобы выдумывать теории всего, — а в том, чтобы предложить минимально необходимую, простейшую теорию для каждой предметной области. Трезвое отношение к собственным возможностям науке только на пользу.

В примере с множествами и равенством, вместо полных классификаций (разбиений на непересекающиеся классы) следовало бы, скорее, говорить о *шкалах* — наборах зон, в пределах которых элементы относительно эквивалентны. Почему относительно? Да потому что всякая шкала иерархична, она объединяет шкалы нескольких уровней — и эквивалентность на одном уровне вполне допускает качественное различие на другом. Например, в музыке одну и ту же ступень звукоряда можно интонировать (в пределах зоны) чуть выше или чуть ниже, в зависимости от музыкального контекста и художественного образа; аналогично в танцах типовые движения допускают разные аранжировки. Примеры из области искусства — но и в науке существуют разные уровни формализации, и не так-то просто отличить фундаментальную теорию от полуэмпирической.

Никакая шкала не может охватить всего — однако однородность универсума позволяет начинать с любого элемента, и структура шкалы будет развернута по отношению именно к нему. Эта однородность вполне аналогична внутренней симметрии шкалы, эквивалентности элементов в пределах зоны; такая «внешняя» симметрия возникает на каком-то из уровней той же шкалы, как одна из зон. В итоге оказывается, что шкала единообразно описывает всю предметную область — полнота восстанавливается с учетом иерархичности.

Выделение подмножества — пример статической шкалы. Мы интересуемся только окрестностью выделенного элемента — а все остальные вне пределов измеримости. Другое подмножество — другая шкала. Чтобы связать эти шкалы — нужно выйти на другой уровень иерархии, где возникают объекты иного типа, внутренне иерархичные. Например, гармония в музыке — иерархическая структура из разных зон, аналог объединения множеств; напротив, полифункциональность предполагает пересечение зон. В общем случае такие иерархии несводимы к исходным элементам и шкалам. Лишь в статическом контексте множество есть совокупность *всех* его элементов — а элемент можно представить как класс *всех* множеств, которым он принадлежит; аналогично подмножество и его дополнение определяются друг через друга. Логическая трудность — в принципиально неформализуемом понятии *всего*: разные трактовки приведут к разным теориям.

Когда математические объекты допускается создавать и уничтожать, вопрос корректности определений выдвигается на первый план. Например, люди рождаются и умирают; в каждый момент (в некоторой фиксированной шкале) есть множество живых людей — но не существует множества людей вообще, — хотя бы потому, что кое-кто еще и не рождался на свет. Теории «общечеловеческих» (в том числе математических) ценностей, с учетом этого обстоятельства, не выдерживают никакой критики. В другой предметной области — свои особенности. Например, электроны образуют ферми-газ — но в каких-то условиях начинают образовываться куперовские пары и бозе-конденсат; это состояния разной симметрии. Наши представления о пище и жилье исторически изменчивы — и множества кулинарных ингредиентов и стройматериалов столь же непостоянны. Но что мешает нам говорить об алгебраических структурах, где возможные операции зависят от элементного состава базы, а элементы изменяются из-за участия в операциях? Как тогда будут выглядеть аналоги разбиений и варианты эквивалентности?

январь 1983

СОДЕРЖАНИЕ