О ЛОГИКЕ СУПЕРИНДУКЦИИ

письмо А. Н. Зенкину

http://unism.pjwb.org
http://unism.pjwb.net
http://unism.narod.ru

Здравствуйте Александр!

Попытаюсь ответить на некоторые положения Вашего письма (27 июля). Похоже, мне следует развить некоторые моменты менее энтимематически — хотя, конечно, совершенно явных рассуждений не бывает никогда.

Сразу хочу оговориться, что у меня начисто атрофирован пиетет по отношению к разного рода регалиям: длинные перечисления титулов и званий, громоздкие списки трудов, рекомендации авторитетов — все это не производит на меня ровным счетом никакого впечатления. Я много раз имел возможность наблюдать как академики и лауреаты всяческих премий говорили совершеннейшую чепуху, путаясь в элементарных вопросах за пределами своей узкой специальности (даже в рамках той же науки). В общем-то, это вполне нормально, поскольку никто не обязан понимать все на свете — но вправе осваивать любые области. Один ошибется, другие поправят — это обычный способ развития науки. Поэтому мнения профессионалов вовсе не обязательно соотносятся с достоинствами той или иной работы — особенно в пограничных областях, где профессионалов как таковых вовсе нет. Разумеется, всякий серьезный исследователь будет учитывать соображения специалистов — как, впрочем, и любые иные соображения, — никогда не считая их свидетельством правоты или приговором.

Мне кажется, Ваша работа интересна прежде всего тем, что впервые за многие годы (чуть ли не со времен Гегеля) обращается внимание на *логическую* основу математических рассуждений. Математики подложили себе (и логикам) крупную свинью, открыв методы символической логики и увлекшись конструированием формальных моделей вместо исследования *действительной* логики научного исследования. В результате классическая логика совершенно захирела, и математики оказались неспособны к рефлексии — тем самым оказавшись в плену двух-трех наиболее примитивных логических приемов. Изобретая разного рода «обобщенные» («альтернативные», «нестандартные» и т. п.) логики, они всячески пытались втиснуть их в рамки все тех же традиционных норм «строгости» и «доказательности» — не пытаясь применить на деле создаваемые ими же модели. Ваша попытка сознательного использования по крайней мере одного (достаточно традиционного, как я попытаюсь показать в дальнейшем) логического приема — настоящий прорыв из замкнутого круга традиционного математического мышления.

Следует, справедливости ради, отметить, что в философии науки время от времени появлялись критические высказывания в адрес примитивного логизирования — однако успехи математической логики казались слишком впечатляющими, а реальных альтернатив так никто и не предложил, — в результате к философской критике в науке не относились всерьез, заметая под ковер постоянно возникающие логические неувязки.

Я не профессиональный логик, и мои возможности по части добывания литературы весьма ограничены. Однако виденное до сих пор, указывает на практически полное непонимание того, что логика отличается от любой ее формальной модели — как физическая система отличается от физической (и тем более математической) теории, ее описывающей [кстати, в последнее время процветает дурная тенденция отождествлять информацию о системе с самой системой — и все дружно ссылаются на Ландауэра]. В частности, формальные схемы символической логики никоим образом не исчерпывают содержания логических законов, сформулированных классической логикой, — в математике возможны лишь *модели*. Истинность с точки зрения такой математической модели вовсе не обязана соответствовать логической истинности — и упомянутые Вами суждения логиков по поводу Вашего метода имеют под собой некоторую основу, хотя и выглядят они довольно убого, на уровне первобытной интуиции.

Давайте еще раз попробуем разобраться с логической основой «метода суперИндукции». В предыдущем письме я был чересчур краток, опуская многие моменты, очевидные для меня, но вовсе не обязательно очевидные для других. Пусть многие места будут слишком тривиальны и хорошо Вам известны — однако это необходимый контекст.

Как известно, в классической логике выделяются три уровня понятий и суждений: единичное, частное (особенное) и общее (всеобщее). Основная трудность здесь — возможность обращения иерархии, когда единичные суждения становятся особенными, всеобщие единичными и т. п. Попытка разрешения этой проблемы, предпринятая Гегелем, привела к возникновению «диалектической» и «спекулятивной”» логики, о которых сейчас практически никто не имеет ни малейшего представления. Математическая логика обычно игнорирует уровни общности — поскольку в этом вопросе наиболее очевидна принципиальная нестрогость математических теорий. Наглядный пример — разграничение индивидов, множеств и классов в знаменитой книге Мендельсона.

В классической логике рассмотрение единичных понятий и суждений совершенно мимолетно, в отличие от уровней особенного и всеобщего. Типичным является отождествление класса, содержащего единственный индивид с этим самым индивидом, и объединение в одну категорию единичных и общих суждений, по чисто формальному сходству структуры высказывания [например, см.: В. И. Свинцов *Логика* — Москва: Высшая Школа, 1987]. Логическая корректность такого отождествления связана с принимаемыми по умолчанию свойствами универсума. Если, скажем, единичные и общие высказывания ведут себя различно по отношению к логическому отрицанию — отождествление их было бы неуместным. Так, обычно указывается, что отрицание общего суждения есть частное суждение, — тогда как отрицание единичного суждения есть тоже единичное суждение. Это наводит на мысль, что следовало бы различать в логике *единичные* и *множественные* понятия или суждения, выделяя затем различные подуровни множественности. Тогда отрицание множественного суждения есть также множественное суждение — хотя, возможно, другого типа (общеутвердительное $\leftrightarrow$ частноотрицательное, частноутвердительное $\leftrightarrow$ общеотрицательное). Это я и имел в виду в предыдущем письме.

Важно, что единичное суждение утверждает некоторое свойство индивида — тогда как множественное суждение (частное или общее) относится к совокупности индивидов. Высказывание $\exists\, x \in X\, P(x)$ есть характеристика совокупности X, а не того x, для которого имеет место $P(x)$, — точно так же, как и $\forall\, x \in X\ P(x)$ есть характеристика всего X. Однако легко видеть, что любой индивид может быть преобразован в совокупность (например, семейство множеств-носителей различных свойств индивида), а любая совокупность вполне может считаться индивидом (обладающим специфическим признаком множественности). Поэтому различие единичного и множественного (частного или общего) не абсолютно и зависит от позиции в логической схеме.

В традиционной теории категорического силлогизма выделяются четыре фигуры и девятнадцать «правильных» модусов, в зависимости от утвердительности/отрицательности и уровня общности посылок. К первой фигуре первого модуса (которую Аристотель считал наиболее совершенной) восходит предрассудок, что всякий категорический вывод обязательно происходит от общего к частному. Строгий вариант этой схемы:

Все Y **суть** Z.
Все X **суть** Y.

Все X **суть** Z.

Обе посылки и заключение здесь — общеутвердительные суждения, и никакого изменения уровня общности в процессе вывода, вообще говоря, не предполагается. Однако на практике обычно совершается вышеупомянутое жульничество с отождествлением единичных и общих суждений, и возникает *логически иная* схема:

Все Y **суть** Z.
X **есть** Y.

X **есть** Z.

Я сознательно выписал эти схемы в «словесной» форме. Как верно указал H. M. Hubey, «перевод» логических схем в символьную запись неоднозначен, и здесь возможны совершенно разные математические модели. Обычная теоретико-множественная интерпретация заменяет *логическую* связку **есть** отношением включения множеств, так что силлогизм *AAA* отождествляется с аксиомой транзитивности включения множеств $(Y \subseteq Z)\ \&\ (X \subseteq Y) \Rightarrow (X \subseteq Z)$. Однако и здесь единичное заключение требует иной формальной схемы, $(Y \subseteq Z)\ \&\ (X \in Y) \Rightarrow (X \in Z)$, которая эквивалентна предыдущей только при условии $X \equiv \{X\}$. Таким образом, более корректная классификация силлогизмов требует выделения единичных высказываний в особую категорию и рассмотрения получающихся при этом правильных модусов.

Другая модель категорического суждения представляет логическую связку **есть** импликацией: S **есть** P преобразуется в $S \Rightarrow P$, и силлогизм *AAA* записывается как *тавтология* $((X \Rightarrow Y)\ \&\ (Y \Rightarrow Z)) \Rightarrow (X \Rightarrow Z)$. Тем самым силлогизм преобразуется в *чисто условное умозаключение*, и необходимость различения уровней общности вообще пропадает! Точно так же, никакого различения фигур по уровням общности отдельных компонент не требуется для *условно-категорических умозаключений*, правильные модусы которых (*modus ponendo ponens* и *modus tollendo tollens*) лежат в основе любого доказательства в современной математике (по крайней мере, в той части его, которая осознается самими математиками).

Все это я говорю для того, чтобы, во-первых, подчеркнуть отличие логических схем от моделей математической логики, и во-вторых, показать, что традиционное представление, будто во всяком достоверном рассуждении из общего должно следовать менее (или, по крайней мере, не более) общее, — всего лишь предрассудок, восходящий к некоторым типичным логическим приемам и вовсе не обязательный для других логических схем. Коль скоро умозаключение делается на основе тавтологии, единичность или общность подставляемых в нее суждений становится вообще безразлична. Поэтому первую инстинктивно негативную реакцию на Ваши публичные выступления по поводу «метода супериндукции» можно расценивать лишь как признак слабой логической грамотности — даже в среде профессиональных математиков и логиков. Действительно, схема «метода супериндукции» в точности воспроизводит правило *modus ponens*:

Если A **то** B
A

B

Подставьте $\exists\, n^*\, Q(n^*)$ вместо A и $\forall\, n > n^*\, P(n)$ вместо B — и получится «метод супериндукции». Доказывается ли A чисто математически, либо путем компьютерного поиска — совершенно неважно. Формально, здесь нет никакой индукции — только вывод по правилу *modus ponens*.

В логике исторически сложились различные представления об индукции и дедукции. Так, ранняя классификация мыслительных операций на дедуктивные (от более общего к менее общему), индуктивные (от менее общего к более общему) и традуктивные (без изменения уровня общности) оказалась нежизнеспособной, поскольку сравнение посылок и заключения по уровню общности далеко не всегда возможно — а тут еще и обращение иерархии общности, с превращением единичных суждений в общие и наоборот! Сейчас логики более склонны отождествлять *дедуктивность* и *доказательность* — и в этом смысле рассуждение по «методу суперининдукции» чисто дедуктивно. Остается еще общегносеологическое (философское) представление об индукции как выдвижении общей гипотезы на основе одного или нескольких единичных примеров — однако схема здесь существенно иная, чем в «методе суперининдукции»:

$$P(n_1)\ \&\ P(n_2)\ \&\ \ldots\ \&\ P(n_N) \Rightarrow \forall n\ P(n)$$

То есть, из истинности некоторого предиката на конечном множестве выводится истинность *того же самого* предиката на всем универсуме.

Особого внимания требует широко распространенная схема «математической индукции»:

$$P(1)\ \&\ (P(n) \Rightarrow P(n+1)) \Rightarrow \forall n\ P(n)$$

Как и в «гносеологической» индукции, здесь существенна одинаковость предиката во всех компонентах схемы. Однако важной особенностью этой схемы является принципиальная двухуровневость: в качестве посылок взяты предикация и связь предикаций. Подобная многоуровневость возникает в математике повсеместно: многообразие и касательное пространство, уравнение и граничные условия — в конце концов, аксиомы и правила вывода (математическая теория). Ряд математиков чувствует принципиальное отличие такой схемы от обычной связи суждений одного уровня — заранее обреченные на неудачу попытки изгнать математическую индукцию из математики хорошо известны. Центральная (гносеологическая) проблема может быть сформулирована так: всегда ли возможно рассматривать актуальный объект, полученный в результате бесконечной последовательности операций? Об этом, в частности, написано у H. M. Hubey в статьях о диагональных доказательствах и геделианизме.

Итак, с точки зрения логики, «метод суперининдукции» — это вовсе не индукция, а, скорее, один из возможных модусов условно-категорического умозаключения. Если рассматривать способы доказательства высказывания $\exists n^*\ Q(n^*)$, простейшая схема *modus ponens* развертывается в иерархию логических схем, соответствующих способу доказательства. Так, можно использовать вспомогательную схему вида

$$\frac{\begin{array}{l}\textbf{Если } Q(n^*) \textbf{ то } \exists n^*\ Q(n^*) \\ Q(n^*)\end{array}}{\exists n^*\ Q(n^*)}$$

Такое доказательство можно назвать конструктивным: явно конструируется такое n^*, для которого выполнено $Q(n^*)$. Подстановка в схему верхнего уровня дает:

$$\frac{\begin{array}{l}\textbf{Если } \exists n^*\ Q(n^*) \textbf{ то } \forall n > n^*\ P(n) \\ \textbf{Если } Q(n^*) \textbf{ то } \exists n^*\ Q(n^*) \\ Q(n^*)\end{array}}{\forall n > n^*\ P(n)}$$

Тем самым, воспроизводится известная гегелевская трактовка первой фигуры силлогизма: $\text{Е} \rightarrow \text{О} \rightarrow \text{В}$ — от единичного к особенному (частному), а от него далее к всеобщему (общему). В более абстрактном виде, эта логическая схема, основанная на двойном *modus ponens*, представлена в левой части следующей таблицы:

Если О **то** В	**Если** В **то** ¬О
Если Е **то** О	**Если** ¬О **то** ¬Е
Е	Е
В	¬В

В правой части таблицы приведена одна из возможных дуальных схем, основанная на двойном *modus tollens*. Легко видеть, что это типичная схема непрямого опровержения на основании контрпримера. Тем самым оказывается, что «метод супериндукции» вполне можно считать обращением одной из схем, связанных с использованием контрпримеров. Разумеется, эта схема более развернута, чем фундаментальные модусы условно-категорических умозаключений — и можно точно так же рассматривать комбинированные схемы, объединяющие *modus ponens* и *modus tollens*:

Если A **то** B	**Если** A **то** B
Если C **то** $\neg B$	**Если** B **то** $\neg C$
C	C
$\neg A$	$\neg A$

Естественно, чем более развернута логическая схема, тем больше существует различных ее модусов. Возможность различного развертывания иерархий есть одно из важнейших положений иерархической логики, которую я развиваю на протяжении ряда лет.

Я оставляю в стороне Ваше замечание насчет правильности обращения (заметьте: не формального отрицания, а именно обращения) сложного высказывания

$$\textbf{Если } \exists n^*\, Q(n^*) \textbf{ то } \forall n > n^*\, P(n)$$

Вопрос это непростой и требует особого рассмотрения. Отмечу только, что наличие тех или иных способов обращения высказываний зависит от конкретной модели, как это опять-таки показано у H. M. Hubey. Вообще говоря, обращение не единственно даже в рамках одной модели — коль скоро высказывание достаточно развернуто. Привычка формально применять алгебраические методы в логике — не самое лучшее приобретение математики XX столетия.

Теперь о «методе супериндукции» как способе функционирования определений. Мне было приятно совпасть мыслью с уважаемым мною Д. А. Поспеловым; на самом деле, первый пример, который я хотел привести, был как раз из жизни функций (с максимумом вместо минимума) — однако потом я решил, что следует оставаться в области натуральных чисел, в соответствии с Вашей работой. Ваше рассуждение по поводу примера с максимальным элементом конечного упорядоченного подмножества бесконечного множества скорее подтверждает мою мысль, нежели противоречит ей. Чем тривиальнее пример, тем более выпукло высвечиваются в нем обстоятельства, замаскированные в более запутанных рассуждениях. В данном случае иллюстрируется принципиальная тавтологичность любого доказательного рассуждения в современной математике. Действительно, всякая математическая теория, сколь угодно сложная на первый взгляд, не содержит в себе более того, что задано набором ее аксиом и принятыми правилами вывода. Доказательство любой теоремы есть лишь демонстрация того, что некоторое положение приводится к стандартной комбинации аксиом конечной последовательностью тавтологических преобразований. Разумеется, в общем случае такое преобразование весьма опосредованно и предполагает конструирование (определение) ряда вспомогательных объектов из имеющихся заготовок. Каждый определенный таким образом объект обладает многими свойствами, часть которых входит в определение, а часть выводится из него; поскольку никакой принципиальной разницы между постулированными и выведенными свойствами нет — можно по-разному определять один и тот же объект, выдвигая на первый план различные его свойства (в иерархической логике это частный случай обращения иерархий). Так, если я определяю максимальный элемент некоторого множества натуральных чисел $N = \{n_i\}_{i \in I}$ как такой его элемент n^*, для которого $n_i \le n^*$ при всех $i \in I$, я должен вывести как теорему такое свойство максимального элемента как $\forall\ n > n^*\ (n \notin N)$ — хотя, конечно, в данном случае доказательство тривиально. Обратно, я могу определить n^* условием $\forall\ n > n^*\ (n \notin N)$ — и тогда мне потребуется доказать, что $\forall\ i \in I$ $(n_i \le n^*)$. Часто в математике выписываются сразу несколько возможных определений — и потом доказывается непротиворечивость.

В «методе суперииндукции» тавтологичность спрятана в процессе доказательства первой посылки: $\exists n^*\ Q(n^*) \Rightarrow \forall n > n^*\ P(n)$. Это доказательство связывает предикаты Q и P, так что оба они могут быть выражены через один и тот же предикат, обращая импликацию в тавтологию (то есть утверждение, истинностное значение которого не зависит от значений входящих в него свободных переменных). Например, это может быть утверждение, что инвариантное множество $Z(m, r)$ есть последовательность ограниченного шага. Тем самым различие предикатов Q и P оказывается лишь эпифеноменом, восходящим к наличию разных определений последовательности ограниченного шага. Просто присутствие одного из определяющих признаков влечет за собой обязательность всех остальных. Тем самым, применение «метода суперииндукции» к ОПВ принципиально не отличается от примера с максимальным элементом.

Хочу особо подчеркнуть, что это никоим образом не умаляет достоинств Вашей работы — поскольку *любая* математическая теория строится подобным образом, как развертывание иерархии. Я только хотел показать, что логика Вашей теории вполне традиционна, и не стоит особенно удивляться одной из обычных логических схем — пусть даже и малоупотребительной [есть и другие редко используемые логические формы]. Важным тут является сам *факт явного использования логической схемы*. Математики большей частью не задумываются об используемых правилах вывода, увлекаясь конструированием все новых объектов и описанием их свойств. Тем самым предполагается, что специфичность теории — в ее аксиомах, тогда как сам способ построения теории остается в тени. Однако правила вывода могут быть столь же конвенциональны, как и аксиомы теории, и от них существенно зависит результат. Это особенно важно учитывать в программах автоматического вывода (problem solvers) [здесь как раз интересна известная книга Д. А. Поспелова *Ситуационное управление: Теория и практика* — Москва: Наука, 1986]. Мне кажется, что одним из перспективных направлений развития математики может быть исследование зависимости структуры математической теории от используемой логики, с учетом возможного превращения правил вывода в аксиомы и наоборот.

Поскольку логическая основа «метода суперииндукции» становится яснее, можно найти другие классы возможных приложений. Общие принципы развертывания логических иерархий позволяют также рассматривать более полные спецификации Вашей схемы, по-разному эксплицирующие структуру входящих в нее предикатов. Разумеется, здесь нет однозначности — огромное количество возможностей. Но это и есть самое интересное.

С уважением,

Павел Иванов

1 августа 1997