

Л. В. Авдеев

П. Б. Иванов

Звукорядность

и

психофизика

восприятия

Москва - 1983

Л. В. А В Д Е Е В,
кандидат физико - математических наук,
Объединенный институт ядерных исследований, город Дубна ;

П. Б. И В А Н О В,
Институт спектроскопии АН СССР, город Троицк ;

З В У К О Р Я Д Н О С Т Ъ
И
П С И Х О Ф И З И К А В О С П Р И Я Т И Я

М О С К В А , 1 9 8 3 .

СОДЕРЖАНИЕ

*** ВВЕДЕНИЕ	2 - 5
Глава I.	
ЗВУКОРЯДНОСТЬ КАК УРОВЕНЬ МУЗЫКАЛЬНОГО ВОСПРИЯТИЯ.	6 - 13
I.1 Аддитивная информационная модель	6 - 9
I.2 Диссонирование интервала	9 - 10
I.3 Критерий устойчивости тембра	10 - 12
I.4 Фурье-спектр диссонирования.	12 - 13
Глава 2.	
ОПТИМАЛЬНЫЕ ТЕМБРЫ И ЗВУКОРЯДЫ	14 - 21
2.1 Принципы анализа	14 - 16
2.2 Развитие звукорядности	17 - 21
Глава 3.	
РАВНОМЕРНО ТЕМПЕРИРОВАННЫЙ 19-СТУПЕННЫЙ ЗВУКОРЯД	22 - 37
3.1 Звуковой состав.	23 - 25
3.2 Интервалика.	25 - 30
3.3 Интонирование.	30 - 37
*** ЗАКЛЮЧЕНИЕ	38 - 40
ПРИЛОЖЕНИЕ I. Информация, соответствующая	
изменению функции распределения	41 - 42
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Система нотации 19-ступенной музыки	43 - 45
ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Организация клавиатуры фортепиано	
в 19-ступенном строе.	46
Г Р А Ф И К И.	47 - 51
ТАБЛИЦА I. τ -тембры.	52
ТАБЛИЦА 2. Оптимальные тембры	53 * 55

ВВЕДЕНИЕ

Необходимость учета динамики при рассмотрении какого-либо явления в последнее время стала настолько широко признанной, что приходится затрачивать особые мыслительные и эмоциональные усилия, дабы заставить себя внимательно отнестись к внешне статическому описанию, вызывающему реминисценции о фотопортретах наших бабушек в их далекой юности. Тем более желательно подчеркнуть, что формальная теория имеет отнюдь не меньше прав на существование — и на адекватность изучаемому предмету, — чем иной весьма динамичный, но, к сожалению, не слишком конструктивный подход. Именно формальные построения являются источником огромного большинства таких понятий и характеристик, которые пригодны к употреблению вне храма суровой науки, для вполне земных и практических надобностей. Наконец, эти абстрактные, неподвижные понятия — и только они — могут служить основой нового, неожиданного понимания динамики — и позволяют исследователю вообще сколько-нибудь осмысленно говорить о ней. Мало сказать: два объекта различаются, — надо еще указать: чем, как и в какой мере. А когда только заходит речь о мере — без количественных, аналитических методов не обойтись.

Предлагаемая работа содержит описание одной из возможных абстрактных моделей восприятия музыкального звучания. Поскольку восприятие, как и любая другая деятельность, является существенно иерархичным, мы попытаемся сразу как-то выделить тот уровень его, где, возможно, предлагаемая модель окажется полезной. Здесь мы можем основываться на иерархической концепции творческой деятельности, развитой на психологическом факультете МГУ в группе А.А.Леонтьева /В.В.Корень, Художественное творчество как процесс. — М., 1983/. Оставляя пока в стороне другие аспекты музыкального

целого, выделим, в соответствии с нашей общефилософской концепцией /П.Б.Иванов, Диалектика иерархий. - Троицк, 1983/, три уровня, три этапа развертывания как самого звучания, так и его восприятия: звуковая основа → функциональность → фонизм. Первый уровень охватывает структурные, статические свойства звучания. В частности, сюда относится звукорядность, как структура /возможно, иерархическая/ на множестве всех допустимых звуков, локально определяющая принадлежность или противоречие каждого отдельного звука /или звукового комплекса/ некоторому единому образованию - звукоряду. Отметим, что выход за пределы локального звукоряда ни в коей мере не приводит к "ошибочным" или "запрещенным" звучаниям. Более того, он является просто необходимым для утверждения звукоряда или замены его другим в музыкальном движении.

Уровень функциональности отражает системную, динамическую сторону музыки. Здесь выступают на первый план закономерности сочетания различных структур, их взаимные переходы. Одним из моментов функциональности является гармония. Подчеркнем, что функциональность, представляющая собой более высокий уровень иерархической системы, не может формироваться без достаточно развитой, иерархически организованной звуковой основы.

Фонизм мы понимаем как единство звучания и функциональности, как отрицание отрицания, возвращающее нас к звуку - но уже опосредованному своей функцией или, обращаясь к категориям диалектической логики, рефлексивовавшему в себя свою "среду обитания", свой контекст. На этом уровне возникает понятие фактуры.

Наша цель - изучение звукорядности. Тем самым резко ограничивается круг допустимых интерпретаций математической модели. Попытки прямого переноса закономерностей звукоряда на описание

динамики или ффонизма неизбежно будут изобиловать натяжками и недоговоренностями. Правильным следует признать лишь выявление той или иной структуры звукорядности в развитии музыки как одного из ее статических моментов, преходящих и подчиненных, но обладающих внутренней определенностью. В частности, параметры модели /например σ или t_n / суть ее внутренние характеристики, хотя именно они служат для "связи" с более высокими уровнями: высший уровень должен описываться по-своему, но мгновенное его состояние задает изменение параметров низшего уровня.

Вернемся к психологии. В общем понимании, изучение количественных закономерностей взаимодействия субъекта со средой относится к ведению психофизики. Первым уровнем, традиционно затрагиваемым психофизикой, является ориентировочная деятельность. Формально можно понимать ее как некоторый оператор, переводящий объективные характеристики объекта-стимула в стимул-образ в сенсорном пространстве субъекта /Ю.М.Забродин/. Именно этим уровнем мы и ограничиваем наше рассмотрение. Точнее, нас интересует, каким образом воспринимаются музыкальные интервалы, если субъект уже настроен на определенный контекст. Как происходит эта преднастройка - пока остается за пределами теории. Интервал психологически представляется двумя группами параметров. Во-первых, это его "квазиобъективные", описательные характеристики, такие как высоты и спектры составляющих интервал звуков, а также "размазанность" каждой гармоник по шкале высот. Второе - субъективная оценка интервала, которая в нашем случае дается так называемым диссонированием. Отметим, что смысл любого термина определяется его ролью в соответствующей теоретической схеме. Тем более это относится к излагаемой ниже статической теории. Так, диссонирование в широком смысле слова может быть понято как любой выход за границы некоторой

опорной ситуации, как введение чужеродного ей элемента. Как мы увидим в дальнейшем, такой оттенок присущ и нашему употреблению термина "диссонирование", хотя мы предпочитаем употреблять это слово в гораздо более узком смысле, а для передачи общего значения используем термин "диссонантность". Вдумчивый читатель скорее попытается увидеть место каждого понятия в целостной модели, выяснить связи его с другими понятиями - вместо того чтобы безуспешно втискивать знакомое сочетание букв в рамки своего, уже отстоявшегося категориального аппарата.

И, наконец, несколько слов о физиологизме теории. Хотя мы описываем весьма низкий уровень восприятия, этот уровень всё же существенно выше органического. Разумеется, почти все существенные положения физиологически обоснованы - в той мере, в какой авторам удалось ознакомиться с работой центральной нервной системы и, в особенности, слухового анализатора. Однако такого рода обоснования являются внешними по отношению к модели - и, возможно, недостаточно глубокими, - поэтому мы ограничиваемся лишь краткими указаниями по ходу изложения на то, как физиологические механизмы вписываются в нашу абстрактную концепцию, какие требования они к ней предъявляют.

Глава I. ЗВУКОРЯДНОСТЬ КАК УРОВЕНЬ МУЗЫКАЛЬНОГО ВОСПРИЯТИЯ

I.I Аддитивная информационная модель

Нашей главной целью в этом разделе является получение меры диссонирования как количественного выражения субъективной оценки звучания некоторого сигнала с дискретным частотным спектром. Внутренний образ этого сигнала описывается высотами h_n и амплитудами t_n ($n=1,2,\dots,N$) отдельных его компонент, которые мы будем называть гармониками. Предполагается, что высота каждой из гармоник - стимулов есть

$$h_n = \log(\eta_n / \text{const}), \quad /1/$$

где η_n - частота гармоники. Для удобства, в /1/ выбран двоичный логарифм, так что сдвигу на октаву отвечает изменение высоты на единицу. Этот выбор масштаба безразличен для модели, как и величина const в /1/, определяющая положение начала отсчета высот.

Предполагается, далее, что представление о стимуле на шкале высот не сосредоточено в одной точке, а описывается функцией распределения гауссовского вида /Граф. I/:

$$f_n(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-h_n)^2}{2\sigma^2}\right]. \quad /2/$$

Распределение Гаусса выбрано потому, что, согласно центральной предельной теореме теории вероятностей, по такому закону будет распределена сумма достаточно большого числа любых малых отклонений от центра распределения. Параметр дисперсии σ , определяющий характерную размазку представления, мы для простоты полагаем одинаковым для всех стимулов.

Определим сначала диссонирование двух гармоник. Наше описание взаимодействия пары стимулов, в основном, следует работе: Г.А.Голицын, Информация и законы эстетического восприятия. В кн.: Число и мысль, вып. 3, М., Знание, 1980.

Пусть имеется два стимула, $f_1(x)$ и $f_2(x)$ вида /2/, с центрами в точках h_1 и $h_2 = h_1 + R$, где R - расстояние между стимулами. Сначала к первому стимулу примешивается второй с небольшим весом $\mu \ll 1$:

$$F(x) = f_1(x) + \mu f_2(x). \quad /3/$$

Вследствие этого, положение h_1 максимума распределения смещается в точку $h = h_1 + r$ /Граф.2/. Для функций вида /2/, величина смещения из-за примешивания /3/ равна

$$r = \mu R \exp\left(-\frac{R^2}{2\sigma^2}\right) + O(\mu^2). \quad /4/$$

Нервная система человека пытается единообразно представить как простой сигнал /2/, так и сложный сигнал /3/. Поэтому результатом взаимодействия стимулов является функция распределения $f(x)$ стандартного вида /2/. Мы предполагаем, что центр /точка максимума/ распределения $f(x)$ лежит в точке максимума функции /3/, положение которого относительно ^{центра} первого стимула h_1 определяется формулой /4/. Поскольку дисперсии всех стимулов в нашей модели одинаковы, естественно считать, что $f(x)$ также имеет дисперсию σ .

Как показано в приложении I, информация, соответствующая переходу от старой функции $f_1(x)$ к новой $f(x)$, будет равна

$$\Delta(f | f_1) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \ln [f(x) / f_1(x)]. \quad /5/$$

Подстановка /2/ и /4/ в /5/ дает:

$$\Delta(f | f_1) = \frac{r^2}{2\sigma^2} = \frac{\mu^2}{2} \cdot \frac{R^2}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{R^2}{\sigma^2}\right) + O(\mu^3). \quad /6/$$

Формула /6/ показывает, что информация, соответствующая изменению представления о первом стимуле в результате учета второго, определяется величиной /Граф.3/

$$d(R) = \frac{R^2}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{R^2}{\sigma^2}\right), \quad /7/$$

которая и интерпретируется как диссонирование пары гармоник. Согласно такой информационной интерпретации, звуки диссонировают, если наличие одного сильно меняет представление о другом.

По формуле /7/, диссонирование пары гармоник максимально, когда $R = \sigma$, то есть расстояние между стимулами приближается к величине их размазки. Функция /7/ является чётной, $d(-R) = d(R)$, поэтому безразлично, который из двух звуков играл роль первого в процессе взаимодействия.

Мы предполагаем, что для сигнала с произвольным заданным дискретным спектром высот $\{t_n, h_n\}_N$ справедлива гипотеза об аддитивности:

$$\Delta(\{t_n, h_n\}_N) = \sum_{m < n}^N t_m t_n d(h_m - h_n), \quad /8/$$

- то есть диссонирование сложного сигнала дается суммой взаимных диссонирований всевозможных пар его гармоник с весами, пропорциональными амплитудам гармоник.

Отметим необходимое физиологическое условие применимости сформулированной выше аддитивной информационной модели. Вообще говоря, в этой модели отдельные гармоники дискретного спектра должны оставаться различимыми: минимальный интервал δ физиологического разрешения соседних звуков должен быть много меньше интервалов R между любыми из гармоник. Если же для какой-то пары гармоник становится $R \lesssim \delta$, то диссонирование должно быть таким же, как если бы эта пара была заменена на одну гармонику с какой-то средней частотой, и амплитудой, равной сум-

ме амплитуд составляющих. В аддитивной модели это требование выполняется, если $\sigma \gg \delta$: размазка стимулов должна значительно превосходить физиологический предел разрешения.

I.2 Диссонирование интервала

Рассмотрим интервал, составленный из двух сложных звуков, имеющих разные частоты основного тона η , но одинаковый спектр $t_n (n=1...N)$ пропорциональных им гармоник $\eta_n = n\eta$. В дальнейшем, этот спектр гармоник мы будем условно называть тембром. Аддитивная информационная модель позволяет найти диссонирование Δ для сложного интервала в зависимости от его величины h /интервал между основными тонами/, если заданы тембр $\{t_n\}_N$ и дисперсия σ . При этом Δ будет содержать зависящий только от тембра аддитивный вклад Δ_0 , соответствующий диссонированию гармоник каждого из звуков между собой, и вклад от взаимного диссонирования гармоник разных звуков, где сосредоточена зависимость от h :

$$\Delta(h) = \sum_{m,n}^N t_m t_n \left[\frac{h + \log(m/n)}{\sigma} \right]^2 \exp \left\{ - \left[\frac{h + \log(m/n)}{\sigma} \right]^2 \right\} \quad /9/$$

Величина /9/ содержит всю информацию о диссонировании интервала; в частности, $\Delta_0 = \Delta(0)$.

В качестве примера, на графике 4 показана $\Delta(h)$ -зависимость /9/ для модельного "экспоненциального" тембра, $t_n = \text{const} \cdot \exp(-n/E)$, $E=7$, при $\sigma=0.02052$ и $\sigma=0.03249$. Зависимость имеет ряд минимумов и максимумов. Система звуков, высоты которых соответствуют минимумам кривой, образует некую целостность по отношению к началу отсчета - как бы множество ступеней "звукоряда", порождаемого основным звуком при заданном тембре

и дисперсии. Звуки же, попадающие в области максимумов кривой, наоборот, разрушают целостность, существенно меняют представление о системе. Вероятно, появление таких звуков должно приводить к перестройке восприятия, к изменению параметров модели - дисперсии, начала отсчета или субъективно воспринимаемого тембра - таким образом, чтобы объединить звуки в новую, более адекватную целостность. Динамика этих процессов перенастройки должна описываться на более высоких уровнях.

В принципе, можно было бы использовать формулу /9/, подставляя в нее извлеченные косвенным образом из экспериментов данные о дисперсии и опорном тембре. Но есть и некоторые общие соображения, которые позволяют фиксировать параметры модели теоретически.

I.3 Критерий устойчивости тембра

Известно, что ухо и, по всей вероятности, мозг являются нелинейными приборами. Воспринимаемый сигнал подвергается сложным нелинейным преобразованиям, в результате чего, например, слышны комбинационные частоты - суммы и разности звучащих на самом деле гармоник. Всё это заставляет предполагать, что в качестве опорных, фундаментальных тембров должны использоваться такие, которые будут устойчивыми по отношению к нелинейным преобразованиям сигнала.

Рассмотрим нелинейность простейшего вида - квадратичную. Каждому тембру $\{t_n\}$ соответствует периодический /во времени T / сигнал

$$F(T) = \sum_{n=1}^N t_n \cos(2\pi n\eta T).$$

/10/

Квадратичная нелинейность Q создает новый сигнал, $F(T) \xrightarrow{Q} F^2(T)$, который можно представить в виде, аналогичном /I0/:

$$F^2(T) = \sum_{n=0}^{2N} q_n \cos(2\pi n\eta T), \quad /I1/$$

где

$$q_n = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n-1} t_m t_{n-m} + \sum_{m=1}^{N-n} t_m t_{m+n}. \quad /I2/$$

Тембр $\{q_n\}$ содержит комбинационные частоты, соответствующие квадратичному преобразованию тембра $\{t_n\} \xrightarrow{Q} \{q_n\}$. Чем более $\{q_n\}$ "похож" на $\{t_n\}$, тем более устойчив первоначальный тембр. Степень сходства тембров можно измерять величиной

$$\tau = \frac{\left(\sum_{n=1}^N q_n t_n\right)^2}{\left(\sum_{n=1}^{2N} q_n^2\right) \left(\sum_{n=1}^N t_n^2\right)}, \quad /I3/$$

которая имеет смысл квадрата косинуса угла между векторами $\{q_n\}$ и $\{t_n\}$ в пространстве со скалярным произведением $\sum_n q_n t_n$.

Всегда справедливо неравенство $0 \leq \tau \leq 1$, причем $\tau=1$ соответствует абсолютно устойчивому, а $\tau=0$ - максимально неустойчивому тембру. Следует также отметить, что если $\tau=1$, то тембр будет абсолютно устойчивым по отношению к нелинейности произвольной степени, а не только квадратичной.

Можно поставить задачу на поиск " τ^N -тембра", обеспечивающего максимум величины /I3/ при фиксированном числе гармоник N . Результаты таких вычислений представлены в таблице I, где выбрана нормировка тембров на единицу,

$$\sum_{n=1}^N t_n^2 = 1, \quad /I4/$$

обеспечивающая фиксацию общей интенсивности звучания. Как видно из таблицы, τ -тембры напоминают экспоненциальные: амплитуды гармоник плавно убывают с ростом их номеров.

Вообще говоря, при выборе фундаментального тембра для модели /9/ необходимо учесть, кроме устойчивости, и другие критерии, но, в любом случае, тембры с малыми τ не могут быть опорными.

I.4 Фурье-спектр диссонирования

Резонно предположить, что восприятие структуры $\Delta(h)$, в первую очередь, выделяет в этой структуре ритмы: сначала главный, а затем и остальные, уже как отклонения от главного. На математическом языке, выделению ритмов соответствует преобразование Фурье:

$$\phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dh}{\sqrt{2\pi}} \exp(i\omega h) \Delta(h). \quad /15/$$

Максимум модуля фурье-спектра /15/ в точке $\omega = 2\pi\nu$ означает наличие у $\Delta(h)$ ритма, ν периодов которого составляют октаву.

Подстановка /9/ в /15/ позволяет найти фурье-спектр диссонирования в аддитивной информационной модели. Его можно представить в виде произведения двух независимых множителей -

" σ -фактора" и "тембр-фактора": $\phi(\omega) = \phi_{\sigma}(\omega) \phi_{\tau}(\omega)$,

$$\phi_{\sigma}(\omega) = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{\omega^2 \sigma^2}{4} \right) \exp\left(-\frac{\omega^2 \sigma^2}{4}\right), \quad /16/$$

$$\phi_{\tau}(\omega) = \left| \sum_{n=1}^N t_n \exp(i\omega \log n) \right|^2. \quad /17/$$

Характер зависимости $\phi_{\sigma}(\omega)$ представлен на графике 5а. Положение точки максимума модуля этой зависимости, $\omega = 2\pi\zeta$, однозначно связано с дисперсией:

$$\sigma = \frac{\sqrt{6}}{2\pi\zeta}. \quad /18/$$

Изображенной на графике кривой соответствует выбор σ по формуле /18/ с $\zeta = 12$.

Можно поставить задачу на поиск оптимального " Φ_{ν}^N -темпора" для ν -ступенного ритма, максимизируя, по всем N амплитудам гармоник, темпор-фактор Фурье-спектра в точке $\omega = 2\pi\nu$,

$$\max_{\{t_n\}_N} \Phi_t(2\pi\nu), \quad /I9/$$

при условии, что темпор нормирован /I4/ по общей интенсивности. Результат решения этой задачи для $N=15$ и $N=31$ отражен в Табл.2. Следует обратить внимание на одну особенность Φ_{ν} -темпоров при целых значениях ν : эти темпоры "октавы", то есть $t_{2n} = t_n$, пока $2n \leq N$. Поэтому в таблице представлены амплитуды только для нечетных гармоник.

Для примера, на графике 5б изображена зависимость $\Phi_t(\omega)$ для оптимального Φ_{I2}^{I9} -темпора. Кривая имеет выраженные максимумы в точках $\omega = 2\pi\xi$ при $\xi = 3, 5, 7, 10, 12, 19, 22$. Однако мультипликативный δ -фактор /Граф.5а/ подавляет все максимумы, кроме главного /при $\xi = 12$ /, на который он настроен, и итоговый Фурье-спектр /Граф.5в/ имеет фактически только 12-ступенный ритм. Если же выбрать дисперсию /I8/ более "грубой", настроить восприятие на меньшее "эффективное число ступеней" $\xi = 7, 5$ или 3, то можно сделать главными именно эти ритмы /ритм $\xi = 10$ выделить значительно труднее из-за близости более ярких максимумов $\xi = 12, 7$ /. Все эти явления можно обнаружить и непосредственно рассматривая зависимость $\Delta(h)$ для соответствующего темпора при различных дисперсиях /Граф.6/. Фурье-анализ позволил нам теоретически указать возможные главные ритмы при заданном темпоре.

Глава 2. ОПТИМАЛЬНЫЕ ТЕМБРЫ И ЗВУКОРЯДЫ

2.1 Принципы анализа

Табл.2 содержит результаты оптимизации тембров для числа ступеней от 2-х до 72-х. Амплитуды нечётных гармоник и показатели τ -устойчивости приведены для полного числа гармоник $N=15$ /верхняя строка/ и $N=31$ /нижняя строка/. В силу октавности тембров, амплитуды чётных гармоник равны амплитудам нечётных, отстоящих от них на целое число октав. По-видимому, число гармоник, большее 31, рассматривать нецелесообразно, так как диапазон слышимых звуков у человека ограничен сверху частотами порядка 20 кГц.

Как было указано в разделе 1.3, основой для формирования звукоряда могут стать только тембры с достаточно большими τ . С другой стороны, число ступеней звукоряда ν однозначно связано с дисперсией σ , раздел 1.4, формула /18/. Поэтому анализ формально полученной последовательности звукорядов, Табл.2, может отражать логику развития звуковых систем от меньшего числа ступеней к большему, логику постепенного подъема от грубого восприятия к более тонкому. Для этого необходимо выделить в Табл.2 наиболее устойчивые тембры / $\tau > 0.5$ / и проследить, как меняется их характер с ростом ν . Такого рода исследование неизбежно несет на себе отпечаток определенной интерпретации - и, следовательно, неоднозначности в понимании обнаруженных закономерностей.

Мы основываемся в дальнейшем на следующих естественных допущениях. Предполагается, что характерной чертой, отличающей один опорный тембр от другого, является расположение "дырок" -

нулевых или весьма малых амплитуд гармоник. По аналогии с речевой акустикой, будем называть зону между двумя соседними дюрками "формантой". Мы утверждаем, что свойства и характер звучания возможных звукорядов определяются в основном составом первой форманты и соотношением ее с другими формантами, прежде всего, со второй. Главной характеристикой форманты служат интервалы, которые образуются между содержащимися в ней гармониками. Количество и разнообразие этих интервалов, в конечном счете, определяется длиной форманты. Так, одиночные гармоники могут образовывать интервалы только с гармониками других формант - и поэтому играют подчиненную роль.

Сопоставление возможных устойчивых тембров и соответствующих им строев приводит к следующим основным принципам.

1/. Переход к строям с большим числом ступеней, сопровождающийся обострением слуха, происходит через разрешение основных противоречий непосредственно предшествующих строев; при этом возможен возврат, на более высоком уровне, к уже возникавшим типам тембров.

2/. По составу первой форманты, определяющей набор так называемых гармонических интервалов, все устойчивые тембры подразделяются на типы:

- квинтовый /гармоники I - 4/,
- терцовый /гармоники I - 6/,
- гармонический /больше 6-ти гармоник/,
- аномальный /гармоники I - 2/.

3/. По характеру высших формант, определяющему употребление интервалов в мелодии, различаются следующие группы опорных тембров и, соответственно, звукорядов:

- моноформантные: существенна только первая форманта, остальные либо состоят из отдельных гармоник, либо расположены

слишком далеко, чтобы значительно взаимодействовать с ней.

- двухформантные: широкие первая и вторая форманты отделены от высших формант либо большим количеством дырок, либо одиночными гармониками. Высокие гармоники объединяются в обширные форманты, как бы уравнивающие первые две.

- многоформантные: несколько низших формант имеют сравнимые ширины.

4/. Соотношение между размерами соседних формант влияет на стабильность соответствующего строя. Поскольку интервалы между гармониками первой форманты /гармонические/ способствуют утверждению в звучании некоторого центра /тоники/, бедность первой форманты по сравнению со второй и высшими приводит к так называемой мелодической нестабильности, когда музыка вообще недостаточно централизована, чтобы мог начаться процесс надстраивания высших уровней организации. Каждый звук мелодии как бы уводит ее от центра. Обратное соотношение, сильное преобладание первой форманты, приводит к гармонической нестабильности, когда централизация слишком локальна, чтобы позволить образоваться каким-либо структурам более высокого уровня. Общим для обоих типов нестабильности является нейтральность и функциональная незавершенность соответствующего строя. Возможными проявлениями нестабильности могут быть модуляционность и образование модальных систем.

2.2 Развитие звукорядности

Перейдем теперь непосредственно к анализу Табл.2. Первым претендентом на формирование устойчивой звуковысотной системы при относительно малом числе гармоник /строка $N=15$ / выступает тембр с $V=2$ /дуотоника/. Это моноформантный строй квинтового типа; соответствующий октавный звукоряд состоит из прима и квинты. Такой строй действительно используется, например, при подаче военных сигналов на горне, трубе и т.п. Как всякий моноформантный строй, дуотоника характеризуется подавляющим преобладанием первой форманты - и потому гармонически нестабильна.

Следующий устойчивый /в том числе и при большом числе гармоник/ тембр появляется при $V=5$, что отвечает пентатоническому звукоряду. Это квинтовый двухформантный строй, у которого вторая форманта содержит столько же гармоник, что и первая /"уравновешивает" ее по длине/. В результате, пентатоника оказывается мелодически нестабильной, что препятствует возникновению на ее основе развитой функциональности. Несмотря на это, она широко распространена, например, в народной музыке, особенно восточной.

Первая попытка нарушить равновесие формант /путем усечения первой форманты/ приводит к 6-ступенному октавному звукоряду /следующая строка Табл.2/. Опорный тембр этой "целотонной гаммы" принадлежит к числу аномальных, так как в нем отсутствует квинта. Пустая первая форманта, содержащая только интервал октавы, естественно приводит к резкому снижению устойчивости тембра и делает строй абсолютно нестабильным мелодически.

Другим направлением стабилизации пентатоники является широко распространенный 7-ступенный диатонический звукоряд. Рас-

ширение первой фoрманты до 6-ти гармоник стало как бы сверхкомпенсацией ущербности первой фoрманты 6-ступенного строя и привело к значительному улучшению устойчивости тембра. Ладь, основанная на 7-ступенном /нетемперированном/ звукоряде, обладает относительно высокой целостностью. Однако вторая фoрманта снова сравнивается с первой по величине /8 - I3 гармоники/, что делает диатонику мелодически нестабильной. Действительно, хорошо известна модуляционность диатонических ладов. Старинная русская музыка дает пример модальной системы /трихордные - гексахордные попевки/, построенной на основе диатоники.

Переход от $\nu=7$ к $\nu=10$ аналогичен шагу от пентатоники к 6-ступенному звукоряду, однако опорный тембр при $\nu=10$ значительно устойчивее, хотя и уступает диатонике. Возникающий строй квинтового типа представляет собой минимальную стабилизацию пентатоники. Двухфoрмантность тембра подчеркивается впервые появляющейся насыщенной третьей фoрмантой, далеко отстоящей от первых двух и объединяющей в себе высшие гармоники. Относительно низкое расположение этой фoрманты /I2 - I7 гармоники/ позволяет "обнаружить" ее уже при сравнительно небольшом числе гармоник. Однако ее появление сигнализирует о возрастании роли высоких гармоник при построении опорного тембра. Поэтому в дальнейшем будет существенна устойчивость тембра при большом числе гармоник /строка $N=31$ /.

Поскольку гармоническая фoнкция терции начинает "осознаваться" уже при $\nu=7$, естественен переход от 10-ти к 12-ти ступеням, "восстанавливающий" первую фoрманту диатоники /I - 6, 8 - 10, I2, I5 - 20/. Впервые возникает оптимальное соотношение размеров первых двух фoрмант, 2:1, - это приводит к высокой стабильности звукоряда. Большое число ступеней делает его практически темперированным. Лучше выражена, по сравнению с 10-сту-

пенным строем, двухформантность: высшие гармоники уходят в четвертую форманту, расположенную гораздо дальше от первых двух. Тем самым, I2-звуковая система как бы объединяет в себе достоинства 7- и I0-ступенного звукорядов, диатоники и пентатоники. Может быть, это было одной из причин того, что I2-ступенный темперированный звукоряд играл - и продолжает играть - столь значительную роль в истории музыки.

Укрепление двухформантности привело к оттеснению высоких гармоник, ослаблению третьей форманты, которая редуцировалась до одиночной I2-ой гармоники. Неудачной попыткой реабилитировать эту форманту выглядит звукоряд с $\gamma=13$, аномального типа, вообще неустойчивый при малом числе гармоник. Следующий тембр, с $\gamma=14$, восстанавливает устойчивость при малом /но только при малом!/ числе гармоник и возвращается при этом к квинтовому типу, почти полностью подавляя высшие гармоники. Φ_{15} -тембр устанавливает равновесие первой и третьей формант /что делает его более устойчивым, хотя и не обеспечивает стабильность строя/, но полностью лишает самостоятельности вторую форманту. Попытка выровнять ситуацию путем усечения первой форманты / Φ_{17} -тембр/ не достигает цели, однако при этом вводится значительная четвертая форманта, что дает интересный нестабильный звукоряд квинтового типа, в котором первая форманта уравнивается высшими формантами, а не второй, как в чистой пентатонике.

Следующий устойчивый тембр, $\gamma=19$, по соотношению формант близок к Φ_{12} -тембру, однако отличается гораздо большей выраженностью основных формант: I - I0, I2 - I6, I8, 20, 24 - 3I. Для малого числа гармоник весь спектр охватывается первыми двумя формантами. При этом, с развитием 7-ой гармоники, первая форманта как бы соединяет вместе первую и вторую форманты Φ_{12} -тембра. В случае большого числа гармоник, как и при $\gamma=12$, возникает

молдная фoрманта высших гармоник, отделенная от первых двух фoрмант самостоятельными одиночными гармониками. Как и при $\nu=12$, первая фoрманта вдвое длиннее второй. Таким образом, при $\nu=19$ формируется стабильный строй с весьма устойчивым двухфoрмантным тембром. Это звукоряд нового, гармонического типа. В первую фoрманту попадают 7-ая и 9-ая гармоники, что вводит в гармонию чистую септиму и делает самостоятельными элементами вертикали нону и большую секунду. Значительно обогащается мелодическая интервалика. Подчеркнуто главенствующее значение первых двух фoрмант, усиливается их противопоставление массе высших гармоник. Фактически, Φ_{19} -тембр оказывается лучшим среди двухфoрмантных тембров.

Дальнейшее развитие фoрмантной структуры идет по двум основным направлениям. Первое - формирование монофoрмантного тембра, в нижней фoрманте которого содержалось бы возможно большее число гармоник, а остальные фoрманты играли бы подчиненную роль. На этом пути возникают весьма устойчивые тембры с $\nu=31$, 41 и 46, похожие на τ -тембры /раздел I.3/, выбранные исключительно по критерию максимальной устойчивости. Как уже отмечалось, монофoрмантные строи гармонически нестабильны.

Другое направление развития - образование многофoрмантных тембров, у которых несколько низлежащих фoрмант имеют сравнимые ширины. Возникают трехфoрмантные / $\nu=26, \dots$ /, четырехфoрмантные / $\nu=34, 36, 63$ / и шестифoрмантные / $\nu=53, 65$ / тембры. Особое место занимает стабильный звукоряд с $\nu=72$, который как бы завершает развитие трехфoрмантных строев. По величине первой фoрманты он сравнивается с монофoрмантными строениями, но лишен присущей им гармонической нестабильности. Строи с числом фoрмант больше трех не успевают окончательно оформиться до $\nu=78$.

Отметим еще раз, что используемая модель становится неприменимой, когда физиологический порог разрешения двух гармоник близок по порядку величины к дисперсии /раздел I.I/, то есть когда число ступеней в звукоряде достаточно велико. По-видимому, уже при нескольких десятках ступеней необходимо переходить к принципиально другому описанию, учитывающему практически непрерывный спектр сигнала. В этой ситуации понятие звукоряда, вероятно, лишается смысла, что потребует, в частности, основательного пересмотра нашего понимания функциональности и поиска новых форм первичной организации звукового материала.

Глава 3. РАВНОМЕРНО ТЕМПЕРИРОВАННЫЙ I9-СТУПЕННЫЙ ЗВУКОРЯД

Краткий обзор в предыдущей главе показывает, что существует большое количество звуковысотных систем, каждая из которых может, в принципе, быть использована в музыке. Более того, многие из них так или иначе уже появлялись в творчестве композиторов, хотя их применение неизбежно ограничивалось инструментари-ем, исполнительской традицией и консервативностью музыкально - практического мышления. Однако возможные звукоряды, даже с одинаково устойчивыми опорными тембрами, отнюдь не равноценны. Большая их часть может выступать лишь локально, служить специальным композиционным или изобразительным целям, - тогда как некоторые звукоряды, отличающиеся особой уравновешенностью и целостностью, могут стать универсальной основой целой области музыкального искусства, ориентирами музыкального мышления. Мы считаем, что именно эти строи служат вехами исторического развития в музыке. Уже проделанный анализ указывает на следующую последовательность звукорядов: 5, 7, 10, 12, 19, ... ступеней. Лишь последние три из перечисленных строев стабильны; кроме того, из-за большого числа ступеней, строи с $\nu=12$ и 19 оказываются хорошо темперированными.

Особый интерес представляет I9-звуковая система. Во-первых, это ближайший фундаментальный строй после I2-ступенного. Во-вторых, он охватывает достаточно небольшое число звуков, что позволяет с достаточной уверенностью пользоваться при его описании категориями изложенной в этой работе модели - а также сохраняет удобство "ручного" исполнения I9-ступенной музыки. Далее, I9-ступенный звукоряд является вершиной, логическим завершением

развития двухформантных строев и потому должен обладать особой универсальностью. Кроме того, I9-ступенный темперированный строй обладает многочисленными внутренними достоинствами, производными от его акустико-перцептивной природы.

Мы хотим, на примере I9-звуковой системы, показать, как можно, используя категории и выводы статической теории, говорить о более высоких этажах музыкального целого. Разумеется, наше изложение не может здесь ограничиваться рамками формальной модели. Мы привлекаем значительное количество нестрогих, спекулятивных соображений и, что самое главное, используем уже имеющийся, хотя и весьма скромный, опыт практического исполнения музыки в I9-ступенном строе.

3.1 Звуковой состав

Первое знакомство с I9-ступенным звукорядом можно установить, рассматривая Граф.7, на котором изображены кривые диссонирования при фиксированном Φ_{I9}^{3I} - тембре и различных дисперсиях, отвечающих I9, I2, 7, 5 и 3 ступеням. Мы видим, что в I9-ступенный звукоряд вкладываются I2-ступенная хроматика, 7-ступенная диатоника, пентатоника и мажорное трезвучие, подобно тому как в I2-ступенный звукоряд вкладывались строи с $\zeta=7, 5, 3$ /Граф.6/. Граф.7 позволяет выработать достаточно естественную и близкую к традиционной систему нотации /см. приложение 2/, которой мы и будем пользоваться в дальнейшем. В приложении 3 показано, как можно было бы организовать клавиатуру фортепиано с I9-ступенной настройкой.

С точки зрения звукового состава строя, интересен вопрос о различных способах вложения в I9-звуковую систему, строев с мень-

шим числом ступеней. Наличие на кривых Граф.7 "лишних" минимумов, обязанных своим происхождением гармоникам высших формант /уже при $N=15$ эти минимумы пропадают/, предопределяет многообразие такого рода вложений. Вспомним, что вложения 7-ступенного звукоряда в 12-ступенный приводят к различным диатоническим и условно-диатоническим ладам. Логично допустить, что вложения $12 \subset 19$ порождают аналогичные целостные образования, которые мы называем диатоническими гиперладами или, короче, гипердиатоникой. Простейшее вложение, изображенное на Граф.76 /будем называть его естественным/, позволяет воспроизводить на 19-ступенном звукоряде 12-ступенную музыку и удобно для установления различных аналогий между этими строями. Однако, как и для вложения $7 \subset 12$, такое вложение $12 \subset 19$ недостаточно подчеркивает целостность 12-звукового образования, обусловливаемую структурой его внутренних тяготений. Действительно, естественное вложение $7 \subset 12$ /Граф.66/ приводило к миксолидийскому мажору или дорийскому минору, то есть к самым нейтральным из диатонических ладов. Мы видим, что вводный тон естественного 12-ступенного вложения ($h=17/19$) несколько ниже вводного тона собственно 12-ступенного звукоряда ($h=11/12$). Разумеется, в контексте 12-ступенной музыки, опирающейся на диатонику, слух заглубляется таким образом, что необходимая вводнотонность оказывается восстановленной, - однако возможность более острого тяготения к тонике остается ($h=18/19$). Сейчас мы не можем сказать наверняка, какое вложение $12 \subset 19$ окажется наиболее целостным, *однако в любом случае оно будет отменно по структуре ст мажор-минору.* Один из подобных гиперладов изображен в примере 1.

$\nu=19$: 0, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 15, 16, 18, 19;

1a. 

Q: 0, -5, -10, -3, -8, -1, -6, +1, -4, -9, -2, -7, 0;

$\gamma=19:$ 19, 18, 16, 15, 13, 11, 10, 8, 7, 5, 4, 2, 0.



$Q:$ 0, -7, -2, -9, -4, +1, -6, -1, -8, -3, -10, -5, 0.

$\gamma=19:$ 0, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 13, 14, 16, 17, 19;



$Q:$ 0, -5, +2, -3, +4, -1, +6, +1, -4, +3, -2, +5, 0;

$\gamma=19:$ 19, 17, 16, 14, 13, 11, 9, 8, 6, 5, 3, 2, 0.



$Q:$ 0, +5, -2, +3, -4, +1, +6, -1, +4, -3, +2, -5, 0.

Этот гиперлад, также как и естественный /пример 2/, допускает расположение по квинтам /количество квинтовых шагов указано под нотами/. Но если в естественном гиперладе можно построить натуральные мажор и минор на тонике, доминанте и субдоминанте, то в примере I это возможно только на побочных ступенях гиперлада: 2, 13 и 10. В то же время, основная ступень /0/ обладает отчетливо ощущаемой на слух тоникальностью, хотя на ней нельзя построить ни мажора, ни минора /так как соответствующая доминанта не имела бы квинты/. Другими примерами могут служить хроматические мажорные и минорные гаммы /см. приложение 2/, которые в 19-ступенном звучании качественно различаются и отличны от мажоро-минора /естественное вложение/.

3.2 Интервалика

Переходя к описанию интервалики 19-ступенного строя, заметим, что кривые диссонирования /Граф.7/ ничего, каждая в отдель-

ности, не говорят о том, какой интервал в реальном звучании окажется консонансом, а какой диссонансом. Как отмечалось во введении, диссонантность обуславливается несоответствием фактического звучания ожидаемому, исходя из контекста. Наша модель позволяет более строго определить, что есть контекст — точнее, звуковысотный контекст. А именно: будем понимать под контекстом локально образующуюся и подвижную иерархическую систему вложений одного звукоряда в другой. Поясним это на примере тональной I2-ступенной музыки.

Если слух настроен на некоторое число ступеней в звукоряде, субъективные расстояния между звуками, очевидно, должны определяться соответствующей кривой диссонирования. Простейшим выражением для расстояния на фоне звукоряда будет интеграл от диссонирования:

$$\rho(h_1, h_2) = \int_{h_1}^{h_2} dh \Delta(h). \quad /20/$$

Отметим, что в формуле /20/ начальная точка отсчета /тоники/ предполагается фиксированной и, вообще говоря, отличной от h_1 или h_2 .

Пусть теперь в I2-звуковую систему вложены 7-ступенный лад и трезвучие: $I2 \supset 7 \supset 3$. Вообще говоря, основные звуки /точки отсчета/ у трезвучия, лада и звукоряда могут не совпадать. Для простоты, мы рассмотрим частный случай, представленный на Граф.6, где тоника миксолидийского мажора совпадает с началом звукоряда и закрепляется тоническим трезвучием. В такой ситуации каждая кривая диссонирования задает свой масштаб на шкале высот. Поскольку здесь имеется два основных вложения, $7 \subset I2$ и $3 \subset I2$, возможны два типа диссонантности. Звук, не принадлежащий ладу, мы будем называть мелодическим диссонансом, а звук, не принадлежащий

трезвучие – гармоническим диссонансом. Вообще говоря, в особых условиях могут появиться и звукорядные диссонансы – но их появление приводит к перестройке слуха на другой звукоряд и изменению всей системы вложений. Этот важный процесс мы пока оставляем в стороне.

На Граф. 6, очевидно, меньше всего диссоннируют квинта и терция /не считая всегда консонантных октавы и унисона/. Все остальные звуки требуют разрешения. Ясно, что сам по себе ладовый звукоряд не определяет тяготений между его звуками: эти тяготения зависят от текущей гармонии. Однако кривая с $\xi = 7$ может показать, каким образом разрешаются внеладовые /хроматические/ звуки, мелодические диссонансы, – они переходят в ближайшие, в смысле формулы /20/, мелодически консонирующие звуки. Но по какой кривой диссонирования определять расстояние? Мы предполагаем, что основной здесь является кривая с $\xi = 3$ /гармоническое разрешение/. Скорее всего, остальные две кривые будут как-то влиять на метрику звуковысотного пространства – но, поскольку диссонирование на уровне трезвучия максимально, его вклад будет определяющим. Так, легко видеть, что только учет гармонии выявляет вводнотонность в рамках лада.

Подытоживая все эти рассуждения, мы утверждаем, что разрешение происходит всегда в ближайший мелодический консонанс, причем расстояние определяется соответствующей типу разрешения кривой диссонирования по формуле /20/. Это, разумеется, никак не запрещает любые другие ходы – но они будут восприниматься как отсрочка или отсутствие разрешения, с соответствующими художественными последствиями.

В качестве примера, рассмотрим разрешение гармонически диссонирующей большой сексты. Возможные точки разрешения, по кривой $\xi=7$, - квинта и м.септима. В области между квинтой и секстой велико ладовое диссонирование, поэтому мелодически б.секста разрешается в м.септиму. Расстояние по кривой $\xi=3$ до квинты также немного больше, чем до септими. Значит, и при гармоническом разрешении секста переходит в септиму по отношению к прежней тонике. Но м.септима - гармонический диссонанс. Следовательно, разрешение б.сексты требует в этом контексте смены гармонии.

М.секунда в той же ситуации диссонирует и гармонически, и мелодически. Гармонически она разрешается в приму, а мелодически - в б.секунду. В первом случае исчезает как мелодическая, так и гармоническая диссонантность /при неизменной гармонии/. А ход на полутон вверх устраняет только мелодическую диссонантность, и поэтому необходима либо смена гармонии, либо последующее гармоническое разрешение в терцию.

Аналогично строение тональной 19-ступенной музыки. Тот тривиальный случай, когда на 19-ти ступенях разворачиваются чисто 12-ступенные построения с опорным Φ_{12} -тембром и старой системой вложений /Граф.6/, мы не рассматриваем. Теперь вложение $19 \supset 7 \supset 3$ дает звукоряд, лад и гармонию /разумеется, локально/. Черты 12-ступенной тональной музыки при этом, в основном, сохраняются. Однако гармония уже не является вполне терцовой, в частности, б.секста оказывается гармоническим консонансом. Не исключено также, что роль гармонии могут выполнять вложения с $\xi > 3$.

Интересно проанализировать возникающую здесь принципиально новую систему вложений: $19 \supset 12 \supset 3$ или $19 \supset 12 \supset 5$. Вместо лада появляется 12-звуковый гиперлад, который и определяет теперь мелодическую диссонантность. Мы не будем останавливаться на особенностях

гипертональной музыки – здесь еще слишком много неясностей. Однако Граф.7 показывает, что многие черты тональной музыки так или иначе воспроизводятся. Например, разрешение узкой секунды ($h=1/19$) полностью аналогично разобранным выше случаям разрешения м.секунды в 12-ступенном звукоряде. Мы никак не затрагиваем в данной работе также сложных вложений типа $19 \supset 12 \supset 7 \supset 3$, отвечающих, по-видимому, каким-то сторонам политональности. Такого рода исследования еще впереди.

Если всё-таки обратиться к звучанию изолированных интервалов, можно отметить следующие их свойства. Поскольку 19-ступенный строй относится к гармоническому типу, большинство интервалов в нем хорошо звучит в гармонической вертикали. Лишь м. и у. секунды, б. ш. септима и у.секста /1, 2, 17, 18, 12 шагов/ являются преимущественно мелодическими, причем у.секунда и ш. септима являются характерными интервалами гиперхроматики.

В то время как унисон и октава остаются совершенными консонансами, 19-ступенная квинта звучит гораздо насыщенней и может быть более свободно использована в полифонии. "Несовершенные консонансы" – квинта, кварта, малые и большие терции и сексты – обладают мягким и гармоничным звучанием. Они практически равноправны, хотя квинта всё-таки наиболее приятна для слуха, а м.секста, может быть, чуть менее гармонична. Интервал $h=15/19$ /у.септима/ близок к натуральной септине /7-ая гармоника/. Тем самым, в 19-ступенной музыке возможны два типа септаккордов: терцовой структуры и трезвучия с у.септимой /см. Граф.7д, $1 \leq h \leq 2$ / – последние обладают невоспроизводимым в 12-ступенной музыке своеобразием, так как объединяют три качественно различных /натуральных/ интервала: квинту, терцию и септиму. Заметим, что аппроксимация натуральной б.терции /5:4/ в 19-ступенном строе значительно лучше, чем в 12-ступенном. А практически идеальное

воспроизведение м.терции $/6:5/$ в I9-ступенном звукоряде полностью уравнивает ее с б.терцией - и тем самым естественно объединяет мажор и минор.

3.3 Интонирование

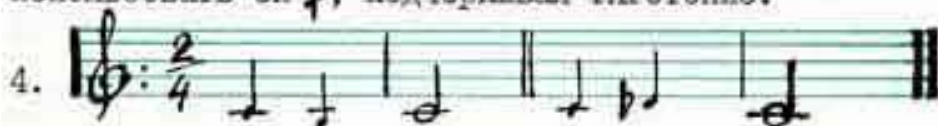
Чтобы привести примеры практического использования I9-ступенного темперированного строя, удобно обратиться к книге Н.Переверзева "Проблемы музыкального интонирования", М., Музыка, 1966. Это тем более интересно, что автор, отрицая вообще какое бы то ни было значение математических /в частности, темперированного/ строев для практического интонирования и восприятия музыки, склоняется к утверждению пифагорова строя в качестве высшего достижения теоретической мысли, *NEC PLUS ULTRA*. Книга изобилует нотными примерами, долженствующими поддержать позицию автора. Однако наш анализ показал, что все без исключения примеры Н.Переверзева могут быть записаны в I9-ступенном строе так, что даже темперированное исполнение удовлетворяет высказанные в комментариях пожелания. При этом мы оставляем в силе требование "чистоты" больших секунд - как разности между квинтой и квартой, - но почему, собственно, надо ориентироваться только на пифагорову, натуральную квинту $/3:2/$, столь пусто звучащую в гармонии? Стоит взять за основу I9-ступенную "гармоническую" квинту - и многие проблемы интонирования исчезнут сами собой /мы не касаемся пока подобной "гармонизации" октавы/. Оказывается, что необходимость натуральных опорных интервалов /квинты, кварты, б. секунды/ столь же абстрактна, как и постулирование строгой темперации, что это лишь возведение в абсолют одной из закономерностей живой музыки. Стоит прийти к такой мысли - и понимание

тетрахордовости, пентатоники и диатоники радикально изменится, как в свое время революционизировало музыкальную мысль осознание **MUSICA FALSA** как **MUSICA COLORATA**/хроматика/, или открытие художественных возможностей диссонансов.

Основные трудности, по Н.Переверзеву, состоят в интонировании м.секунд, увеличенных и уменьшенных интервалов, энгармонических последований и терций. Что касается малых секунд, то здесь различаются "диатонический полутон", "хроматический полутон" и "вводный тон". Большая секунда - фиксированный опорный интервал, лишь изредка меняющий свои размеры, в окружении альтерированных звуков. В I9-ступенном звукоряде имеются три секунды: большая ($h=3/19 \approx 190$ центов), малая ($h=2/19 \approx 126$ ц.) и узкая ($h=1/19 \approx 63$ ц.). Как видно, б.секунда здесь существенно уже пифагорейской /204 ц./, хотя она по-прежнему остается разностью между "гармоническими" квинтой и квартой. Диатоническому полутону соответствует в тональной I9-ступенной музыке малая секунда /см. приложение 2, пример П.1/, которая явно больше пифагорейской нормы /90 ц./ и равна хроматическому полутону /в пифагоровом строе - 114 ц./. Однако, за исключением размеров, все описанные Переверзевым черты диатонического и хроматического полутонов полностью соответствуют их функциям в I9-ступенной музыке. Это свидетельствует о том, что роль интервала определяется отнюдь не его величиной - но его расположением по отношению к локально фиксированной системе звуков. Диатонический полутон - наименьший интервал диатонического звукоряда, и это, вместе с другими характеристиками контекста /раздел 3.2/, определяет его свойства. Хроматический полутон выводит за пределы тональности - этим всё сказано. Нельзя только на основании размеров, как это делает Переверзев, называть секунду до - до \sharp , в



примере 3, хроматическим полутоном, а секунду до \sharp -ре - диатоническим полутоном. Скорее стоило бы сказать, что звук до \sharp по отношению к до - мажорному диатоническому звукоряду является хроматическим изменением первой ступени, а по отношению к звуку ре - вводным тоном. Естественно, что исполнители стремятся с^узить секунду до \sharp -ре, обострить вводнотонность. Это подчеркивается в 19-ступенном прочтении примера 3, когда до - до \sharp - малая секунда, а до \sharp -ре - узкая, вдвое ^уже. Точно так же и в примере 4 звук ре \flat является альтерацией второй ступени мажора и вводным тоном к тонике, что требует понизить его - и приводит к 19-ступенному строю. Вводный тон си в том же примере может, оставаясь диатоническим, не менее сильно тяготеть в тоннику, - однако это тяготение другой природы /гармоническое разрешение, раздел 3.2/, а потому полутон си - до оказывается вдвое шире мелодического вводного интервала ре \flat -до. Разумеется, в определенных гармонических и метроритмических условиях следовало бы вместо си использовать си \sharp , подчеркивая тяготение.



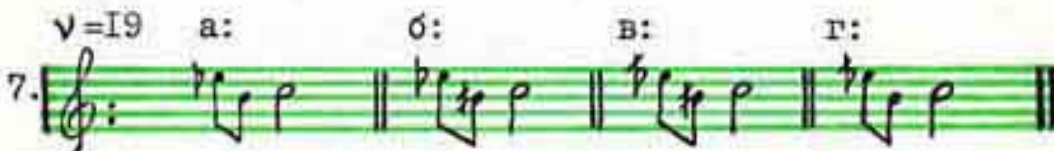
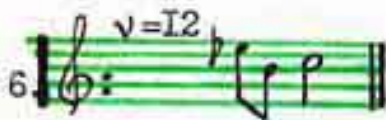
Еще один образец интерпретации 12-ступенной записи дан в примере 5. Переверзев совершенно прав, утверждая, что, в первой



половине примера, нота си \sharp лежит выше, чем до, и является вводным тоном к до \sharp . Это отражено в 19-ступенной записи, где первая и вторая триоли совершенно одинаковы по структуре. Но в 19-

-ступенном исполнении ощущается еще и бифункциональность вводного тона $\text{сi}\Delta = \text{ре}\flat$, в одинаковой степени тяготеющего к $\text{до}\sharp$ и к тонике.

Аналогичным образом исполняются в I9-ступенном строе увеличенные и уменьшенные интервалы. Фрагмент, I2-ступенная запись которого приведена в примере 6, в различных контекстах может превратиться в любой из вариантов примера 7.



Вариант 7б наиболее подчеркивает "уменьшенность" интервала и мелодическое тяготение $\text{сi}\sharp$ к до . Вариант 7в естественен для гармонического до -минора.

В примере 8 показана ситуация, когда увеличенная секунда вклинивается между двумя другими секундами. Переверзев утверждает, что при этом крайние секунды сжимаются, подчеркивая увеличенность средней. Этому соответствует первый вариант I9-ступенной интерпретации, представленный в примере 9а. Однако возможно и другое, ориентирующееся на гармонию прочтение этого оборота - пример 9б. В таком виде вся последовательность звучит строго и сдержанно.



Проиллюстрируем теперь исполнение энгармонических последований в I9-ступенном строе. Пример I0 демонстрирует I2-ступенную запись энгармонической модуляции из ля \flat -мажора в до-мажор. Звук фа \sharp во втором такте, согласно пифагоровой норме, немного выше, чем соль \flat , хотя темперированное исполнение отождествляет их. С точки зрения I9-ступенного строя /пример II/, соль \flat во втором такте есть натуральная септима

Example I0: $v=12$ A \flat -dur to C-dur. The notation shows a sequence of notes: A \flat , B \flat , C, D, E, F, G, A \flat , B \flat , C, D, E, F, G, A \flat , B \flat , C. The notes are grouped into chords: A \flat (I), B \flat (II), C (III), D (IV), E (V), F (VI), G (VII), A \flat (VIII), B \flat (IX), C (X), D (XI), E (XII), F (XIII), G (XIV), A \flat (XV), B \flat (XVI), C (XVII).

Example II: $v=19$. The notation shows a sequence of notes: A \flat , B \flat , C, D, E, F, G, A \flat , B \flat , C, D, E, F, G, A \flat , B \flat , C. The notes are grouped into chords: A \flat (I), B \flat (II), C (III), D (IV), E (V), F (VI), G (VII), A \flat (VIII), B \flat (IX), C (X), D (XI), E (XII), F (XIII), G (XIV), A \flat (XV), B \flat (XVI), C (XVII).

от ля \flat , а фа \sharp - малая /терцовая/ септима в "доминантсепт-аккорде" соль \sharp - си \sharp - ре \sharp - фа \sharp , который принципиально отличен как по функции, так и по звучанию от "натурального" септ-аккорда на ля \flat . Точно так же в примере I2 энгармонически

Example I2: $v=12$ and $v=19$. The notation shows a sequence of chords: C \sharp (I), D \sharp (II), E \sharp (III), F \sharp (IV), G \sharp (V), A \sharp (VI), B \sharp (VII), C \sharp (VIII), D \sharp (IX), E \sharp (X), F \sharp (XI), G \sharp (XII), A \sharp (XIII), B \sharp (XIV), C \sharp (XV), D \sharp (XVI), E \sharp (XVII), F \sharp (XVIII), G \sharp (XIX).

равные в I2-ступенном строе ля \sharp и си \flat будут отвечать различным звукам в I9-ступенной транскрипции. При этом становится ясно, что I2-ступенная запись, правильно указывая мелодические тяготения, неверно воспроизводит функции звуков в гармонии: в первом такте си \flat является чистой септимой уменьшенного септаккорда и мелодически тяготеет к си, а во втором такте ля \sharp , тяготеющее к ля, - основной звук уменьшенного септаккорда /в отличие от I2-ступенной темперации, в I9-ступенном строе цепь из четырех звуков, расположенных по малым терциям, не замыкается октавой, так что уменьшенный септ-

аккорд всегда имеет основной звук/. Лучшего результата нельзя было ожидать, так как пифагоров строй, лежащий в основе современной нотации, не приспособлен к описанию гармонии.

Терции в 12-звуковой системе представляют наибольшие трудности при интонировании. Темперированная б.терция близка к пифагорейской, то есть сильно завышена. С другой стороны, она всё-таки ниже пифагорейской на 8 центов - и для мелодики, опирающейся на чистые квинты, кварту и б.секунду, она слишком узка. Малая терция вообще отсутствует как самостоятельный интервал и получается исключительно вычитанием б.терции из квинты. Если же за основу будет взята не натуральная /702 ц./, а гармоническая квинта /695 ц./, тогда, во-первых, снимаются излишне жесткие требования к величине терции /поскольку гармоническая квинта меньше натуральной на 7 центов и, следовательно, может варьировать в этих пределах/, а, во-вторых, б.терция отличается от натуральной только на 7 ц., а м.терция вообще совпадает с натуральной. Всего в 19-ступенном строе имеются четыре терции: большая /379 ц./, малая /316 ц./, широкая /442 ц./ и узкая /253 ц./.

Все они хорошо звучат в гармонии, что позволяет, гибко используя терции, подчеркивать также мелодику.

Возьмем в качестве примера "особо трудный случай интонирования терций" /выражение Н.Переверзева/, пример 13. Здесь

13. *Andante* И.С.Бах, Соната №3 для скрипки-соло.

непреодолимую трудность являет собой задача согласования гармонического, консонантного звучания терции до-ми в первом такте и вводнотонности звука ми по отношению к последующему фа. В 19-ступенном строе есть два пути решения этой задачи. С одной

стороны, как мы уже знаем, диатонический полутон в контексте I9-ступенной музыки уже обладает достаточной вводнотонностью, а потому легкое повышение звука ми, с одной стороны, подчеркнет эту вводнотонность, а с другой - сделает б.терцию более консонантной /отметим, что в I2-ступенном строе наблюдалось явно противоположное: с повышением вводного тона, б.терция начинала резко диссонировать/. Такое решение позволит исполнить фрагмент чисто диатонически, строго - что, как нам кажется, соответствует духу баховской музыки.

Однако возможно и другое, более эмоциональное прочтение примера I3, отвечающее, по-видимому, интонации Иды Гендель /см. Н.Переверзев, стр.189/. Использование всюду в примере I3 повышенных звуков ми \sharp и си \sharp , вместо диатонических ми и си, резко обостряет мелодические тяготения, изменяя, впрочем, характер гармонии. Тоническое и доминантовое трезвучия приобретают еще более мажорное, приподнято-эмоциональное звучание в связи с использованием широкой терции вместо большой. В I9-ступенной музыке такие трезвучия не диссонировуют, благодаря несколько пониженной квинте. По-видимому, это один из таких условно диатонических ладов, которые становятся возможными только в I9-ступенном строе.

Завершая наш краткий экскурс в практику I9-ступенного интонирования, рассмотрим более протяженный фрагмент, пример I4. Здесь первые такты арии И.С.Баха записаны в I9-ступенной интерпретации на основе тщательного анализа соображений Н.Переверзева /стр.111 - 124/. Всё отличие от традиционной записи - в двух нотах: си \sharp во втором и четвертом тактах подчеркивают тяготение в тонику. Узкие секунды си \flat -ля и ре-до \sharp в третьем такте, а также фа \sharp - соль в пятом, соответствует интонации скрипачей-профессионалов. Все остальные секунды - диатонические,

v=I9

И.С.Бах, Ария.

14.

поэтому их размер определяется величиной гармонической квинты и не соответствует пифагоровой норме, что, однако, не отражается на звучании. Поскольку в арии существенна в основном мелодическая сторона, размеры широких интервалов определяются расположением секунд. Численные значения величин терций, увеличенных и уменьшенных интервалов, получаемые на темперированном 19-ступенном звукоряде, близки к измеренным в реальном звучании /Черверзев, стр.110/ и несколько подчеркивают тенденции интонирования, наблюдающиеся у исполнителей.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы не хотели бы, чтобы читатель склонился к мысли: раз дело дошло до заключения, работа завершена — по крайней мере, в основном. Нет, работа только начинается! И чтобы показать это, перечислим некоторые из направлений, которые мы видим уже сейчас, — а стоит только продвинуться в одном каком-нибудь направлении, как замечаешь несколько других.

1/. Разработка глобальных, диалектико-философских положений; более точное определение границ применимости модели. На этом пути нам предстоит углубить понятие звукоряда, соотнести его с гармонией и ладом, выделить статические компоненты на всех уровнях — вплоть до сонорика — и попытаться объединить их общим формализмом.

2/. Совершенствование терминологии, организация ее в иерархическую систему. Окончательного решения у этой задачи не будет никогда, но относительного успеха добиться можно.

3/. Изучение аналогий в развитии технических элементов различных искусств: музыки, поэзии, живописи и др., — возможностей переноса формальных методов из одной области в другую.

4/. Углубление представлений о физиологических механизмах, лежащих в основе нашей модели. Нахождение экспериментально измеримых характеристик. Описание индивидуальных особенностей восприятия.

5/. Описание активности субъекта при восприятии и воспроизведении мелодии, выход с психофизического на психологический уровень, нахождение логических эквивалентов моделируемых перцепторных процессов.

6/. Возможность использования инвариантов музыкального произведения для его характеристики. Выделение низших уровней иерархии инвариантов. Описание процесса восприятия музыки как формирования системы локальных инвариантов и соотнесение этого описания с формальной моделью.

7/. Развитие техники формантного анализа строев: уточнение понятия стабильности, выяснение связей формантного состава с особенностями мелодики и гармонии; проблема централизации созвучий на основе гармонических интервалов.

8/. Более тесная привязка к истории музыки, соотнесение с ней результатов формального анализа. Здесь уже рассмотрены такие вопросы, как формирование неоктавных строев: тетрахордовость, гексахордные системы и др. Найдены строи с периодичностью не через октаву, а через более широкие интервалы.

9/. Проблема темперации. Исследование нетемперированных строев, в частности, строев восточной музыки, опорные тембры которых не имеют лидирующего ритма. Здесь изучены фурье-спектры для τ -тембров, нетривиально объединяющих ритмы перспективных оптимальных звукорядов /5, 7, 10, 12, 15, 17, 19, 22, .../.

10/. Описание зонного характера реальных строев. Для этого уже разработана техника усреднения по локальному звуковому объему, позволяющая выделить зоны, в которых может варьировать ступень звукоряда без разрушения его. Разумеется, уровни вложения звукорядов определяют каждый свои зоны, так что реально имеется иерархия зон для каждого звука.

II/. Развитие техники анализа звуковысотного контекста: уточнение описания разного рода тяготений и разрешений; выяснение связи мелодического движения с изменениями локальной системы вложений звукорядов; описание сдвигов начала отсчета; описание вложений, отличных от естественного, условно диатонических ладов.

12/. Использование формальной модели для автоматизации некоторых стадий анализа музыки - как реально звучащей, так и возможной в данном строе.

13/. Исследование конкретных строев, а в особенности, 19-ступенного. Переложение имеющихся произведений и запись их на пленку. Композиция в расчете на специфические возможности 19-ступенного строя. Нахождение и анализ произведений, ориентированных на другие строи /как, например, "Концерт-буфф" С.Слонимского/.

14/. Выход в область сплошного спектра. Определение элементарных форм организации звукового материала в такой ситуации и построение формальных моделей. Выяснение связей со звукопорядностью, способа и условий перехода к "беззвукорядной" музыке.

15/. И многое, многое другое ...

Авторы благодарны А.В.Музыкантову за возможность воспользоваться гитарой с 19-ступенной темперацией и полезные беседы, а также М.П.Папушу за обсуждение работы и помощь литературой.

П Р И Л О Ж Е Н И Е I.Информация, соответствующая изменению функции распределения

Согласно классическому определению, информация, сообщаемая некоторым событием, есть минус логарифм априорной вероятности события:

$$\Delta = - \ln w. \quad /П. I/$$

Чтобы определить функцию распределения $f(x)$ случайной величины X , нужно провести серию из большого числа n независимых измерений этой величины. Пусть область изменения X разбита на большое число m малых интервалов $[x_i, x_i + \delta_i)$, $i = 1 \dots m$. Тогда наблюдению именно $f(x)$ соответствует ситуация, когда в i -й интервал попадает $n f(x_i) \delta_i$ результатов измерений. Если априорная функция распределения $f_1(x)$ задана, то можно подсчитать вероятность этой совокупности событий:

$$w = \prod_{i=1}^m \frac{[f_1(x_i) \delta_i]^{n f(x_i) \delta_i}}{[n f(x_i) \delta_i]!}. \quad /П. 2/$$

При этом предполагается, что все $\delta_i \rightarrow 0$, соответственно, $m \rightarrow \infty$, но $n \rightarrow \infty$ значительно быстрее, так что для каждого i выполняется $n f(x_i) \delta_i \rightarrow \infty$. Подставляя /П. 2/ в /П. I/, находим информацию:

$$\begin{aligned} \Delta &= -n \sum_{i=1}^m f(x_i) \delta_i \ln [f_1(x_i) \delta_i] + \sum_{i=1}^m \ln \{ [n f(x_i) \delta_i]! \} = \\ &= n \sum_{i=1}^m f(x_i) \delta_i \ln \left[\frac{1}{f_1(x_i)} \right] + \sum_{i=1}^m \left(\ln \{ [n f(x_i) \delta_i]! \} - n f(x_i) \delta_i \ln \delta_i \right). \quad /П. 3/ \end{aligned}$$

В пределе $\delta_i \rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$, можно переписать /П. 3/ в виде:

$$\Delta(f | f_1) = \Delta/n = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \ln \left[\frac{1}{f_1(x)} \right] + A(f), \quad /П. 4/$$

где аддитивный член $A(f)$ - некий функционал, зависящий только от апостериорного распределения $f(x)$ и не зависящий от априорного распределения f_1 . Этот функционал удобно определить из условия нормировки,

$$\Delta(f_1 | f_1) = 0, \quad /II.5/$$

требуемого, чтобы для любой априорной функции распределения информация была равна нулю, если апостериорное распределение не отличается от априорного. Накладывая на /II.4/ условие нормировки /II.5/ и подставляя найденный таким образом функционал $A(f)$ в /II.4/, уже легко получить окончательный ответ:

$$\Delta(f | f_1) = - \int dx f(x) \ln \left[\frac{f(x)}{f_1(x)} \right]. \quad /II.6/$$

Использование /II.6/ позволяет на более строгой основе повторить рассуждения Г.А.Голицына. При этом, в частности, когда $f(x)$ и $f_1(x)$ - распределения Гаусса со средними h и h_1 , дисперсиями σ и σ_1 , информация /II.6/,

$$\Delta(f | f_1) = \frac{(h-h_1)^2}{2\sigma_1^2} - \ln\left(\frac{\sigma}{\sigma_1}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma^2}{\sigma_1^2} - 1 \right), \quad /II.7/$$

положительна при любом соотношении между σ и σ_1 , в отличие от результата Голицына, где последний член /II.7/ отсутствует.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2.

Система нотации 19-ступенной музыки

Интервал между соседними звуками темперированного 19-ступенного звукоряда будем называть "шагом". Диатонический звукоряд натурального мажора записывается обычным образом:

v=19: 0, 3, 6, 8, 11, 14, 17, 19.

II. I

Q: 0, +2, +4, -1, +1, +3, +5, 0.

прима
б. секунда
б. терция
кварта
квинта
б. секста
б. септима
октава

Сверху указаны величины интервалов /числа шагов/ от тоники до соответствующих звуков, а снизу подписаны расстояния от тоники по квинтовому кругу и названия интервалов. Как видно, диатоническому целому тону соответствует интервал в три шага, а диатонический полутон состоит из двух шагов. Звукоряд параллельного минора начинается от б. сексты и состоит из тех же звуков.

Названия нот диатонического звукоряда остаются без изменения /до, ре, ми, фа, соль, ля, си/. Все остальные звуки можно образовать с помощью следующих знаков альтерации:

	<u>повышение</u>	<u>понижение</u>
<u>на 1 шаг</u>	♯ /полудиез/,	♭ /полубемоль/,
<u>на 2 шага</u>	♯♯ /диез/,	♭♭ /бемоль/,
<u>на 3 шага</u>	Δ /большой диез/,	▽ /большой бемоль/,
<u>на 4 шага</u>	x /дубль-диез/,	B♭ /дубль-бемоль/;

q /бекар/ - отмена альтерации.

При этом энгармонически ми♯ = фа, си♯ = до; доΔ = ре;
до♯ выше ре♭ и т.п.

Движение по квинтовому кругу мажорных и минорных тональностей происходит обычным образом, с той лишь разницей, что при ключе добавляются не целые, а половинные знаки альтерации (♯, ♭). Квинтовый круг энгармонически замыкается через 19 шагов.

Будем использовать следующие названия интервалов:

[1 шаг	узкая	секунда	[18 шагов	широкая	септима
2 шага	малая	секунда	17 шагов	большая	септима
3 шага	большая	секунда	16 шагов	малая	септима
4 шага	широкая	секунда	15 шагов	узкая	септима
4 шага	узкая	терция	15 шагов	широкая	секста
5 шагов	малая	терция	14 шагов	большая	секста
6 шагов	большая	терция	13 шагов	малая	секста
7 шагов	широкая	терция	12 шагов	узкая	секста
8 шагов		кварта	11 шагов		квинта
9 шагов	малый	тритон	10 шагов	большой	тритон

Любой из этих интервалов может быть увеличен или уменьшен /на 2 шага/, а также расширен или сужен /на 1 шаг/. Так, размер уменьшенной большой терции равен 4-ём шагам, а расширенной широкой сексты - 16-ти шагам. Та или иная интерпретация одного и того же /по количеству охватываемых шагов/ интервала определяется художественной трактовкой фрагмента в целом и может приводить к небольшим отклонениям реального интонирования от темперированного строя в пределах соответствующей зоны.

Восходящая хроматическая гамма до-мажор:

II.2 $v=19$: 0, 2, 3, 5, 6, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17.

Q: 0, -5, +2, -3, +4, -1, -6, +1, -4, +3, -2, +5.

Она отличается от естественного вложения $I2 \subset I9$ повышенным звуком фа♯ /большой тритон вместо малого/.

Восходящая хроматическая гамма до - минор:

П.3 $\nu=19: 0, 2, 3, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 15, 16, 18, 19.$

$Q: 0, -5, +2, -3, -8, -1, -6, +1, -4, -9, -2, -7, 0.$

От хроматической мажорной гаммы /П.2/ она отличается тремя повышенными ступенями: си \sharp , ми \sharp , ля \sharp . Хроматический минорный гиперлад обладает более острым вводным тоном си \sharp .

Обе эти гаммы могут быть расположены по квинтам /с учетом энгармонической замены/ : соответствующие расстояния от тоники подписаны под нотами. Однако для получения восходящего мажорного гиперлада необходимо сделать 6 квинтовых шагов вниз и 5 вверх от тоники. А восходящий минорный гиперлад получается 2-мя шагами вверх и 9-ю вниз. Именно эта несимметричность придает минорному гиперладу обильную остроту и целостность, в то время как мажорный гиперлад, наряду с естественным /раздел 3.1, пример 2/, является наиболее симметричным и потому нейтральным из диатонических гиперладов.

Нисходящие хроматические гаммы имеют противоположные свойства. Для тональностей до \sharp -мажор и до \sharp -минор они имеют вид:

П.4 $\nu=19: 19, 17, 15, 14, 12, 11, 9, 8, 6, 4, 3, 1, 0.$

$Q: 0, +5, +10, +3, +8, +1, +6, -1, +4, +9, +2, +7, 0.$

П.5 $\nu=19: 19, 17, 16, 14, 13, 11, 9, 8, 6, 5, 3, 1, 0.$

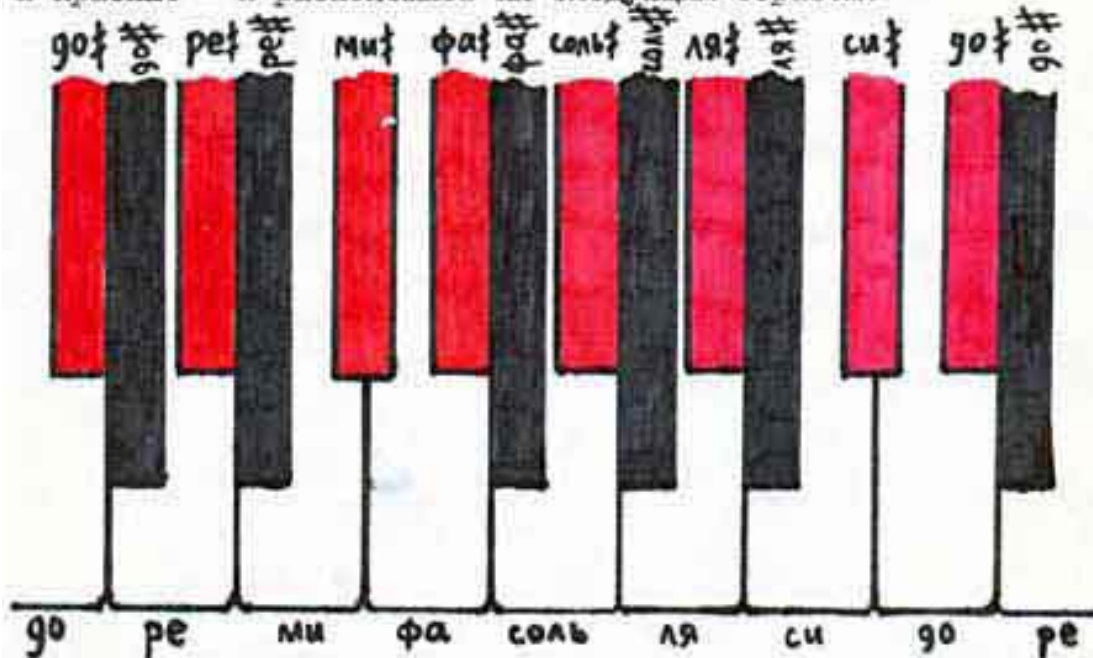
$Q: 0, +5, -2, +3, -4, +1, +6, -1, +4, -3, +2, +7, 0.$

Минорная гамма снова отличается от мажорной тремя повышенными ступенями: си \sharp , ми \sharp , ля \sharp .

ПРИЛОЖЕНИЕ 3.

Организация клавиатуры фортепиано в 19-ступенном строе

Предполагается сделать клавиши трех цветов: белые, черные и красные - и расположить их следующим образом:



По белым клавишам исполняется диатоническая гамма до-мажор, по черным - пентатоника; белые и черные клавиши вместе дают хроматическую восходящую гамму до-мажор /см. приложение 2, пример П.2/. Красные клавиши дают диатонический до-мажор, а вместе с черными - хроматическую нисходящую гамму до-мажор /пример П.4/.

Для удобства игры, клавиши следует расположить на трех уровнях: черные должны быть выше, чем белые, а красные - выше, чем черные.



График 1. Распределение Гаусса.

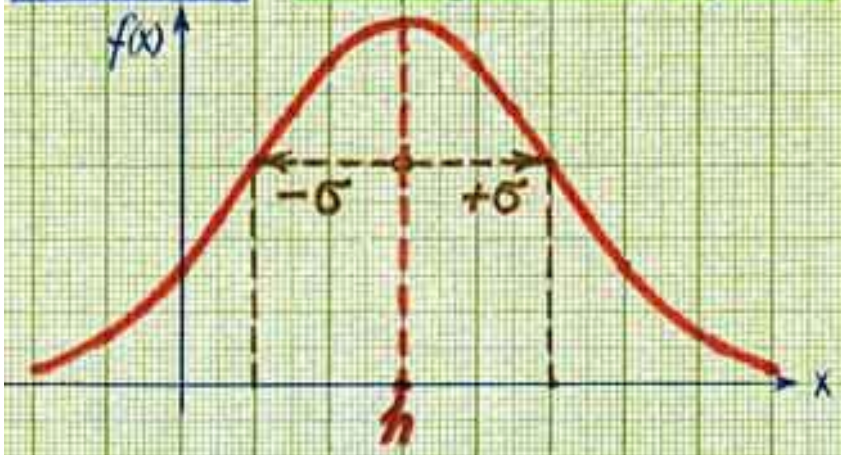


График 2. Взаимодействие пары стимулов.

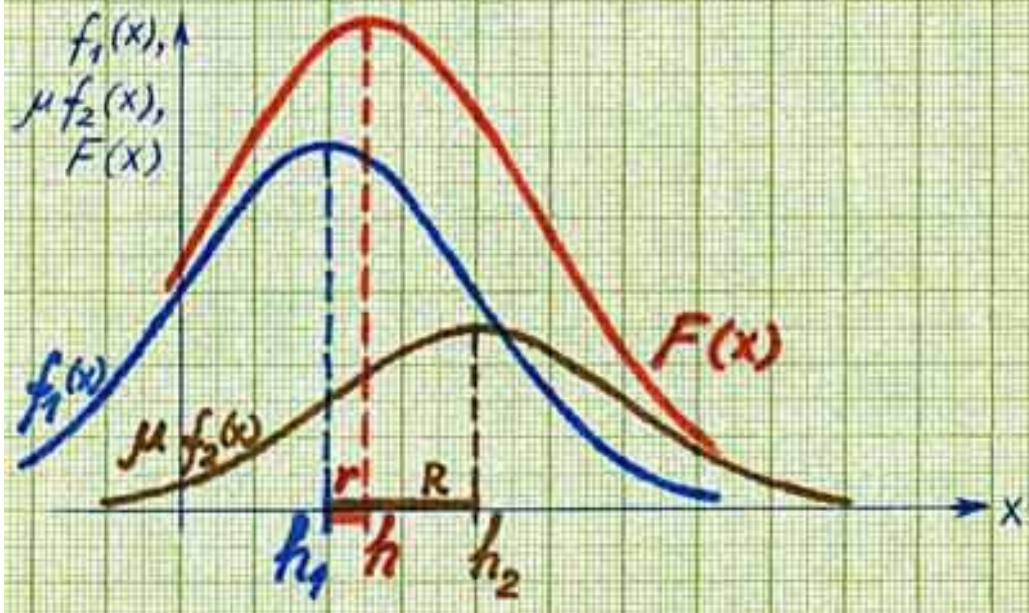
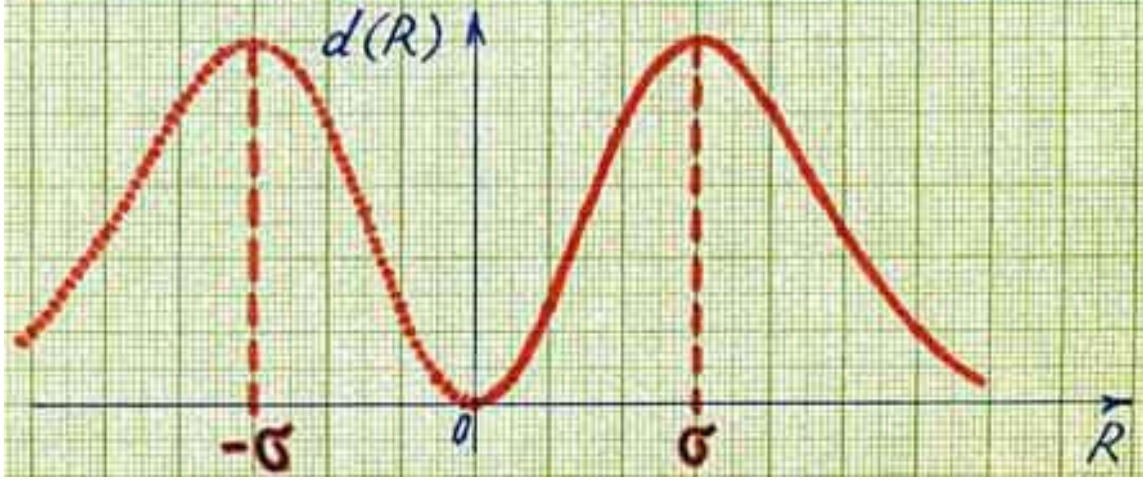


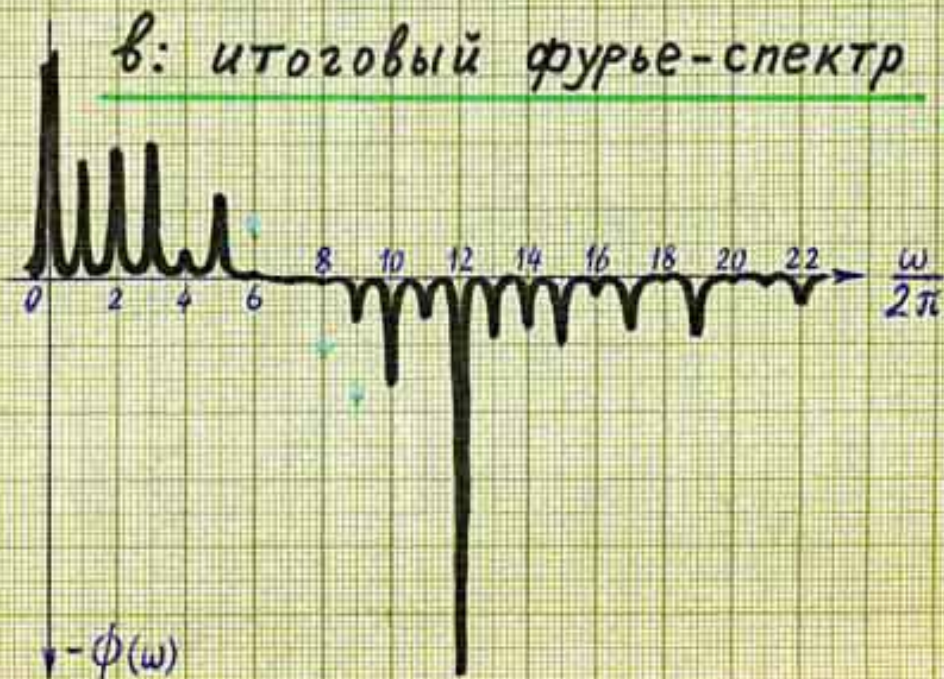
График 3. Диссонирование пары гармоник.



Графики 4. $\Delta(h)$ для экспоненциального тембра, $E=7.$



Графики 5. Фурье-спектр диссонирования.



Графики б. $\Delta(h)$ для Φ_{12}^{19} -тембра;

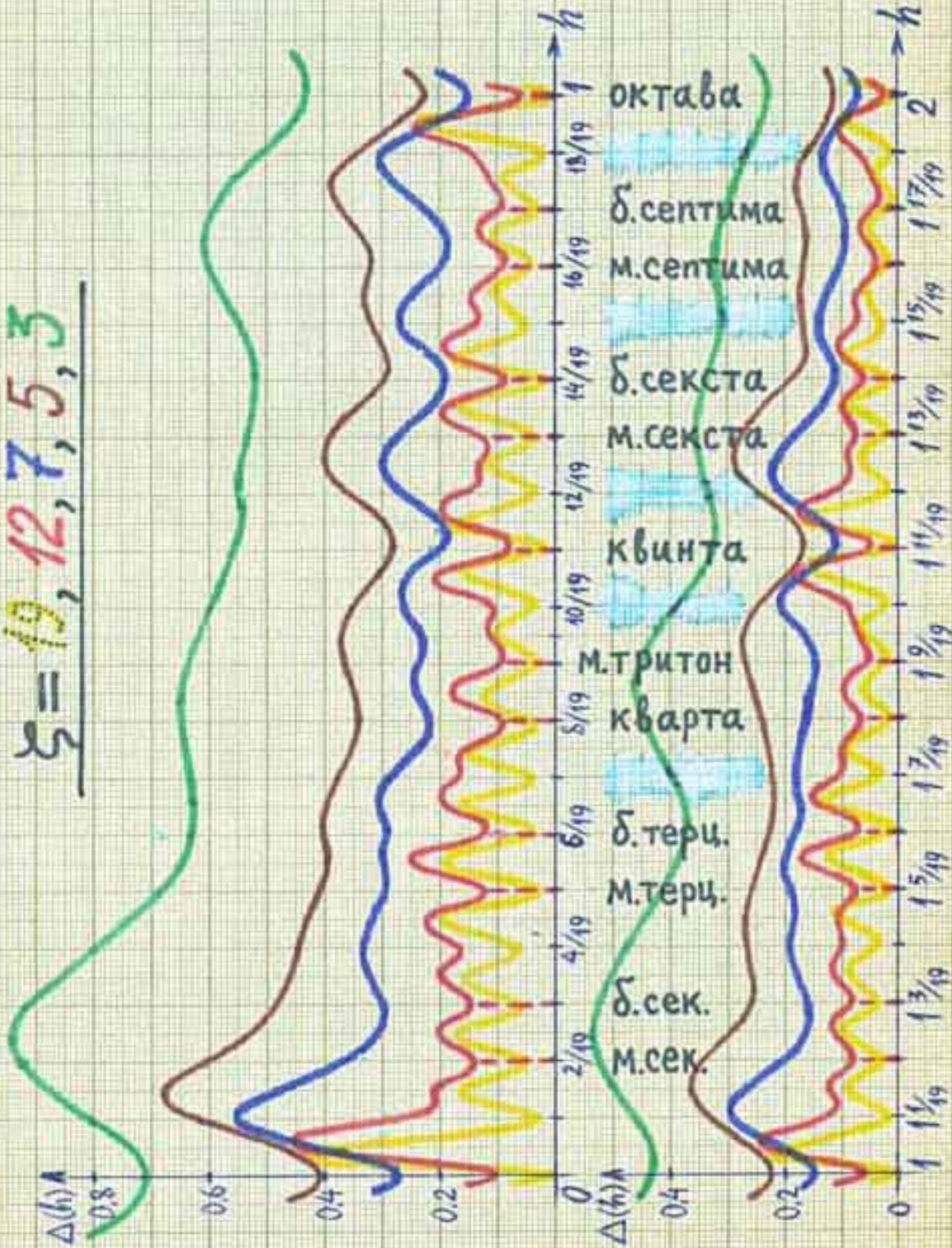
$\alpha: \zeta=12$ $\beta: \zeta=7$ $\gamma: \zeta=5$ $\delta: \zeta=3$



Графики 7. $\Delta(h)$ для ϕ_{19}^{31} -тембра; $\alpha: \zeta=19$,

$\delta: \zeta=12$, $\nu: \zeta=7$, $\varepsilon: \zeta=5$, $\rho: \zeta=3$.

$\zeta = 19, 12, 7, 5, 3$



Т А Б Л И Ц А I. τ -теморн

τ	τ^7	τ^9	τ^{12}	τ^{15}	τ^{19}	τ^{25}	τ^{31}	τ
	0.9037	0.9162	0.9259	0.9313	0.9355	0.9391	0.9409	
I	0.5478	0.4884	0.4267	0.3836	0.3422	0.2995	0.274	I
2	0.5042	0.4629	0.4131	0.3754	0.3375	0.297	0.2724	2
3	0.4395	0.4238	0.3919	0.3624	0.3299	0.293	0.2698	3
4	0.3603	0.374	0.364	0.3451	0.3196	0.2875	0.2662	4
5	0.2741	0.3166	0.3306	0.3239	0.3069	0.2806	0.2616	5
6	0.1884	0.2554	0.2931	0.2995	0.2919	0.2724	0.2562	6
7	0.11	0.1937	0.2528	0.2725	0.275	0.263	0.2499	7
8		0.1348	0.2112	0.2436	0.2565	0.2524	0.2428	8
9		0.0815	0.1697	0.2136	0.2367	0.2409	0.235	9
10			0.1296	0.183	0.2158	0.2286	0.2265	10
11			0.0921	0.1526	0.1943	0.2155	0.2174	11
12			0.0581	0.1231	0.1724	0.2017	0.2078	12
13				0.095	0.1506	0.1875	0.1977	13
14				0.0688	0.1289	0.173	0.1872	14
15				0.0449	0.1079	0.1582	0.1763	15
16					0.0877	0.1434	0.1652	16
17					0.0686	0.1286	0.1539	17
18					0.0507	0.114	0.1426	18
19					0.0343	0.0997	0.1311	19
20						0.0857	0.1197	20
21						0.0723	0.1084	21
22						0.0594	0.0973	22
23						0.0473	0.0864	23
24						0.0358	0.0758	24
25						0.0252	0.0655	25
26							0.0556	26
27							0.0461	27
28							0.0371	28
29							0.0286	29
30							0.0206	30
31							0.0	31

Т А Б Л И Ц А 2. Оптимальные тембры

γ τ	I	3	5	7	9	II	I3	I5	I7	I9	2I	23	25	27	29	3I
I 0.306	.4I62	0	0	.2536	.I005	0	0	.4I0I								
I 0.475	.2755	0	0	.244	0	0	.065	.3I64	.I529	0	0	0	0	.I654	.295I	.3087
2 0.522	.4097	.27I9	0	0	0	.3I6I	0	.08I7								
2 0.397	.32I5	.I7I9	0	0	0	.27I3	0	.I077	.I632	0	.0507	.3I32	0	0	0	.2593
3 0.3I3	.3903	.0I56	.3825	0	0	0	.3I18	0								
3 0.33	.306	.03II	.3036	0	0	0	.2332	0	0	.0098	.II6I	0	.2872	0	0	.2I54
4 0	0	0	0	0	.54I6	.47I3	.5354	.4448								
4 0.23I	.3203	0	0	0	0	.2475	.I9II	0	0	.3247	0	.2I35	0	.3064	0	.2I6
5 0.576	.33I9	.32I	0	.3I04	.2398	0	0	0								
5 0.5I3	.2646	.2678	0	.24I3	.2I24	0	0	0	0	0	.2738	0	0	.II05	0	.I05
6 0.529	.34I8	0	.356I	.2809	.3258	.I229	0	0								
6 0.492	.269I	0	.285I	.2307	.255I	.I083	0	0	0	0	0	.0943	.2492	0	.083I	.0542
7 0.735	.3I6	.3588	.I663	0	.2782	.2363	.I6	0								
7 0.602	.2246	.2892	.I79I	0	.2543	.2275	.0789	.020I	0	0	0	0	0	.I3I9	.23I2	0
8 0.266	.5	0	0	0	0	0	0	0								
8 0.363	.3342	0	0	0	0	0	0	.0683	0	.324I	.2763	.I997	.2597	.3435	.I59I	0
9 0.297	.4085	0	.3275	0	0	.269I	0	.2I3I								
9 0.348	.3376	0	.299I	0	0	.I869	0	.I358	.I256	0	0	0	.I404	.I39	0	0

ν	τ	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31
I0	.612	.342	.1896	.0788	.3122	0	0	.3422	.3161								
I0	.565	.2688	.163	.045	.2376	0	0	.2685	.2412	.1944	0	.2413	.0175	0	0	0	0
II	.39	.3521	0	0	.3104	.2961	.3068	0	.3597								
II	.455	.2664	0	0	.2358	.225	.2316	0	.2724	.273	.021	0	.0749	.202	0	0	0
I2	.671	.3241	.317	.2397	0	.3053	0	0	.265								
I2	.596	.2489	.2446	.1776	0	.2366	0	0	.1978	.2308	.249	0	0	0	.225	0	0
I3	.449	.3683	0	.2735	0	.228	.339	.3755	0								
I3	.529	.2237	0	.239	0	.2153	.1924	.2771	0	.27	.1991	.2773	0	0	0	.2619	0
I4	.568	.3617	.383	0	.1352	0	0	0	0								
I4	.412	.28	.2922	0	.1001	0	0	0	0	.2448	0	0	.043	.2967	0	.2942	0
I5	.706	.3152	.2614	.3398	.1045	0	.3807	0	0								
I5	.503	.1726	.2376	.2701	0	0	.2687	0	0	0	.1762	.2709	.2746	.0845	0	.274	0
I6	.315	.3966	0	.2629	.3258	0	0	.1431	0								
I6	.301	.3072	0	.2212	.2415	0	0	.1317	0	0	.2899	0	0	0	.2953	0	.0184
I7	.6	.3125	.3355	0	.0718	.3179	.2293	.3283	0								
I7	.558	.2177	.2473	0	.0891	.2469	.1964	.2504	0	0	0	.0034	.2495	.2469	.2166	0	0
I8	.45	.4447	0	.1508	0	.4045	0	0	0								
I8	.197	.3456	0	.0382	0	.344	.0167	0	0	0	0	.3426	0	0	0	0	.2094
I9	.698	.2792	.3393	.3388	.0166	.2319	0	.0831	.2282								
I9	.607	.1161	.2401	.2415	.134	.2455	0	.1749	.2442	0	0	0	.035	.2429	.1296	.1828	.2485

ν	τ	I	3	5	7	9	II	I3	I5	I7	I9	2I	23	25	27	29	3I
22	.698	.5376	.2723	.2546	.0828	.0331	.2272	0	.3395								
22	.578	.2543	.209	.1968	.0676	.0302	.1679	0	.2573	.2485	0	0	0	.0876	0	.215	.2564
26	.5II	.3673	.1512	0	.3635	0	.3257	.1461	0								
26	.473	.3	.1467	0	.2955	0	.2578	.1426	0	.0268	0	.1615	0	0	0	0	.04II
3I	.756	.2943	.2665	.2799	.3062	.06II	.1083	0	.2842								
3I	.696	.2253	.2242	.2109	.2392	.0736	.1099	0	.2353	0	0	.2029	.1261	.193I	0	0	0
34	.668	.2823	.3154	.3178	0	.2005	0	.2537	.2758								
34	.62I	.199	.2442	.2354	0	.1748	0	.21	.2237	.2197	0	0	.1983	.2444	.0234	0	0
36	.578	.3059	.3209	0	.32	.2929	0	.1616	0								
36	.604	.2198	.2413	0	.2417	.2305	0	.1453	0	.2117	.1505	.2275	.045	.1859	.1887	.1014	0
4I	.787	.3117	.3047	.1473	.2813	.2943	.1172	0	.1755								
4I	.696	.2251	.2157	.1454	.2276	.204	.0495	0	.1642	0	.1822	.2337	0	0	.1901	.1699	.2166
46	.824	.3291	.3422	.232	.1196	.2447	.1288	0	.05II								
46	.676	.2649	.2398	.1258	.1462	.1372	.1524	.0174	0	.2574	0	.2443	.2127	0	0	0	.2275
53	.713	.2941	.2943	.2874	.0332	.2954	0	.2387	.286								
53	.6I	.2223	.2232	.2258	.0035	.2241	0	.1961	.2251	0	.1825	.0078	0	.1953	.2249	0	0
63	.646	.313	.3005	0	.3II	.0483	.3423	.1165	.1034								
63	.57I	.2617	.1985	0	.2I	0	.2635	.1447	.1356	0	0	0	.2654	0	0	.2306	.163
65	.705	.302	.295	.2824	0	.282	.2188	0	.2953								
65	.644	.2255	.2209	.2085	0	.2119	.1595	0	.2188	0	.158	0	.2178	.1465	.1986	.0423	.2208
72	.778	.2407	.3063	.276	.3039	.213	.3024	0	.1139								
72	.719	.1565	.2437	.2391	.2457	.2044	.2282	0	.1376	.136	0	.1932	0	.0504	.0591	0	0