PROPRIETÀ DI COMBINAZIONI LINEARI INTERE. APPLICAZIONI

M. P. Bernardi, E. Gagliardo, U. Gianazza[1][2]

Nota presentata dal s. c. E. Gagliardo

Abstract Elementary properties of integer linear combinations of rational numbers get unusual formulation and unusual application

Indicheremo con $\{.\}$ la funzione

(1) $$\{x\} = x - \max_{t \text{ intero},\ t \leq x} t, \qquad 0 \leq \{x\} < 1.$$

Essa ha ovviamente le proprietà

$$\{x\} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \text{ intero};$$

(2) $$\{x\} + \{y\} - \{x+y\} = \text{ intero}.$$

Siano Q_0, R_0 due generici irrazionali; per fissare le idee:

(3) $$Q_0 = \log_2 \frac{3}{2}; \qquad R_0 = \log_2 \frac{5}{4}.$$

È chiaro che

(4) $$nQ_0 + mR_0$$

con n ed m interi non entrambi nulli non può risultare a sua volta intero. (Se per assurdo $nQ_0 + mR_0 = s$ intero, si avrebbe

$$\log_2 (\frac{3}{2})^n + \log_2 (\frac{5}{4})^m = s \qquad \text{da cui} \qquad \frac{3^n}{2^n} . \frac{5^m}{4^m} = 2^s$$

e infine

$$3^n . 5^m = 2^{s+n+2m},$$

contrariamente alla unicità della fattorizzazione in numeri primi).
Fissato $k > 1$ intero, sia:

(5) $$\begin{cases} Q_k = \dfrac{i}{k} \text{ dove } i \text{ (intero) rende minimo } |\dfrac{i}{k} - Q_0| & \lim\limits_{k \to +\infty} Q_k = Q_0 \\ R_k = \dfrac{j}{k} \text{ dove } j \text{ (intero) rende minimo } |\dfrac{j}{k} - R_0| & \lim\limits_{k \to +\infty} R_k = R_0 \end{cases}$$

---

[1] Dipartimento di Matematica. Università di Pavia

[2] Lavoro eseguito con il contributo del M.U.R.S.T.

e quindi $0 < i, j < k$. Ad esempio per $k = 12$ è immediato verificare che

$$Q_{12} = \frac{7}{12} \qquad R_{12} = \frac{4}{12} \tag{6}$$

e analogamente per $k = 19$

$$Q_{19} = \frac{11}{19} \qquad R_{19} = \frac{6}{19}. \tag{7}$$

Teorema 1 *Fissati n e m in $\mathbf{Z}$ non entrambi nulli, per $k \to \infty$ si ha definitivamente*

$$\{nQ_k + mR_k\} \neq 0 \tag{8}$$

Dimostrazione Poichè, come osservato in (4), il numero $nQ_0 + mR_0$ non è intero, si può trovare un suo intorno I che non ospita interi; perciò il numero $nQ_k + mR_k$, avendo limite $nQ_0 + mR_0$, cade definitivamente in I e non è intero.

Fissato $k > 1$ intero, la ricerca delle coppie di interi (n, m) soluzioni di

$$\{nQ_k + mR_k\} = 0 \tag{9}$$

è facilitata dal seguente

Teorema 2 *Fissato $k > 1$ intero (e, di conseguenza, fissati i, j come in (5)), per tutti gli interi relativi λ, μ, ν la coppia (n, m):*

$$n = \lambda j + \mu k, \qquad m = \lambda(-i) + \nu k \tag{10}$$

è una soluzione di (9); inoltre, ogni soluzione di (9) è della forma (10) se e solo se $M.C.D.(i, j, k) = 1$

Dimostrazione È evidente che tutte le coppie (10) sono soluzioni di (9). Per dimostrare il seguito, si definisca anzitutto la funzione:

$$\Phi_k(n, m) = \{nQ_k + mR_k\} \qquad (n, m \in \mathbf{Z}).$$

Dalla (2) segue:

$$\Phi_k(n_1, m_1) + \Phi_k(n_2, m_2) - \Phi_k(n_1 + n_2, m_1 + m_2) \in \mathbf{Z}; \tag{11}$$

d'altra parte i valori assunti da Φ_k sono del tipo t/k, con t intero e $0 \leq t < k$. Ciò suggerisce di ridurre $\Phi_k(n, m)$ modulo 1; si ottiene allora un omomorfismo

$$\Phi_k : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/(k)$$

Ci proponiamo appunto di caratterizzare il nucleo di tale omomorfismo. Come ulteriore conseguenza di (11) si ottiene:

$$\Phi_k(n+k,m) = \Phi_k(n,m+k) = \Phi_k(n,m).$$

Ciò suggerisce di ridurre n ed m modulo k ; risulta indotto, allora, un omomorfismo

$$\overline{\Phi}_k \ : \mathbf{Z}/(k) \times \mathbf{Z}/(k) \to \mathbf{Z}/(k).$$

Dimostreremo il risultato enunciato se riusciremo a far vedere che il nucleo di $\overline{\Phi}_k$ è generato dalla coppia di classi di equivalenza $(\bar{j},-\bar{i})$ se e solo se M.C.D.$(i,j,k) = 1$.

Osserviamo preliminarmente che il dominio di $\overline{\Phi}_k$ ha k^2 elementi, l'immagine $Im\,\overline{\Phi}_k$ ha al più k elementi, dunque il nucleo $Ker\,\overline{\Phi}_k$ ha almeno k elementi.

Supponiamo ora $d = M.C.D.(i,j,k) = 1$; dunque $d' = M.C.D.(i,j)$ è primo con k. Esistono interi α,β per cui $\alpha i + \beta j = d'$; dunque $\overline{\Phi}_k(\alpha,\beta)$ genera $\mathbf{Z}/(k)$, $Im\overline{\Phi}_k$ ha k elementi e quindi anche $Ker\overline{\Phi}_k$ ha k elementi. Basta dunque far vedere che esistono k coppie distinte multiple della coppia ordinata $(\bar{j},-\bar{i})$. Sia $\lambda i \equiv \lambda j \equiv 0$ (modulo k); allora

$$\lambda d' = \lambda(\alpha i + \beta j) \equiv 0 \qquad \text{modulo } k;$$

ma d' è primo con k, per cui k divide λ, come si voleva.

Supponiamo, ora, invece $d = M.C.D.(i,j,k) > 1$ Allora $Im\overline{\Phi}_k$ è generata da $\bar{d}$ e dunque ha meno di k elementi; dunque $Ker\overline{\Phi}_k$ ha più di k elementi. Ma allora $Ker\overline{\Phi}_k$ non può essere generato da una sola coppia (in particolare, non può essere generato da $(\bar{j}.-\bar{i})$), perchè ogni coppia $(\bar{n},\bar{m})$ ha al più k multipli interi distinti.

Teorema 3 *Siano ancora k,i,j come nel teorema 2; sia $d = M.C.D.(i,j,k)$. Allora le soluzioni di (9) sono tutte e sole le coppie (n,m) del tipo:*

$$n = (\lambda j + \mu k)/d, \qquad m = (\lambda(-i) + \nu k)/d \tag{12}$$

dove λ,μ,ν sono interi relativi

Dimostrazione Poniamo $k = d.k'$, $i = d.i'$, $j = d.j'$. Allora si vede facilmente che

$$Q_{k'} = \frac{i'}{k'}, \qquad R_{k'} = \frac{j'}{k'}.$$

Si dimostra pure subito che le soluzioni di

$$ni + mj \equiv 0 \qquad (\text{modulo } k)$$

coincidono con le soluzioni di

$$ni' + mj' \equiv 0 \qquad (\text{modulo } k'),$$

per cui il risultato segue dal teorema 2.

Esempi
Sia $k = 12$; allora $Q_{12} = \frac{7}{12}$ e $R_{12} = \frac{4}{12}$.
Tra le soluzioni di (9) si ha

$$\{4Q_{12} - R_{12}\} = 0, \tag{13}$$

la quale si ottiene dalle (10) per $\lambda = 7$, $\mu = -2$, $\nu = 4$, ma anche, ad esempio, per $\lambda = 19$, $\mu = -6$, $\nu = 11$.
Si ha anche la soluzione

$$\{3R_{12}\} = 0, \tag{14}$$

che si può ottenere dalle (10) per $\lambda = 3$, $\mu = -1$, $\nu = 2$; invece $\{nQ_{12}\} = 0$ se e solo se $n \equiv 0$ (modulo 12)
Sia $k = 19$; allora $Q_{19} = \frac{11}{19}$ e $R_{19} = \frac{6}{19}$.
Tra le soluzioni di (9) si ha

$$\{4Q_{19} - R_{19}\} = 0, \tag{15}$$

la quale si ottiene dalle (10) per $\lambda = 7$, $\mu = -2$, $\nu = 4$, ma anche, ad esempio, per $\lambda = -12$, $\mu = 4$, $\nu = -7$.
Questa volta k è un numero primo; dunque necessariamente:

$$\{nQ_{19}\} = 0 \quad \text{se e solo se } n \equiv 0 \quad (\text{modulo}19)$$

e

$$\{mR_{19}\} = 0 \quad \text{se e solo se } m \equiv 0 \quad (\text{modulo}19).$$

Applicazione

Nel sistema armonico naturale le (3) misurano in scala logaritmica gli intervalli di quinta Q_0 e di terza maggiore R_0 mentre le (5) indicano le approssimazioni corrispondenti fornite dal sistema temperato k-tonico.

In ogni tale sistema si hanno combinazioni lineari di quinte e terze maggiori (cioè particolari successioni di modulazioni) che, pur non riducendosi algebricamente a zero, risultano coincidenti con l'unisono a meno di ottave (cioè che riportano inaspettatamente alla tonalità di partenza); ciascuna ha luogo soltanto in un numero finito di sistemi temperati (cfr. Teorema 1).

Indicando con $\{.\}_*$ la funzione

$$\{x\}_* = \min_{h \text{ intero}} |x - h|$$

che ovviamente è nulla se e solo se $\{x\}$ è nulla, l'espressione $\{nQ_0 + mR_0\}_*$ misura la dissonanza che il sistema naturale presenta tra la tonalità di partenza e la modulazione di n quinte ed m terze maggiori.

Le (13), (15) esprimono il fatto che nei sistemi 12-tonico e 19-tonico quattro consecutive quinte seguite da una terza maggiore discendente (e quindi anche la modulazione opposta) riportano alla tonalità di partenza (cfr. L. v. Beethoven 7^0 sinfonia, battute 1-11), implicando nel sistema naturale una dissonanza limitata: $\{4Q_0 - R_0\}_*$.

La (14) esprime il fatto che nel sistema 12-tonico tre terze maggiori equivalgono ad una ottava. Questa identificazione non sussiste nel sistema 19-tonico e implicherebbe nel sistema naturale una dissonanza più grave:

$$\{3R_0\}_* > \{4Q_0 - R_0\}_*.$$

Dipartimento di Matematica
Università di Pavia
Corso Strada Nuova 65
27100 Pavia